

Autres Écoles – PC

Algèbre

1590. [Navale] Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $Q = f(P)$ le polynôme défini pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt.$$

- a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 b) Calculer son déterminant.

1591. [ENSEA] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) Trouver toutes les matrices M qui vérifient $M^2 = A$.
 b) Trouver toutes les matrices qui commutent avec A .
 c) Cet ensemble est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

1592. [CCINP] Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$ si et seulement si $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

1593. [CCINP] a) On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A .

- i) On suppose $a = b = c = 1$. Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer la matrice de f dans cette base.
 ii) On suppose $c \neq 0$. Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que la matrice de f dans cette base a une diagonale nulle.

b) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \lambda_x x$.

- i) Montrer que $\lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.
 ii) Montrer que g est une homothétie.
 c) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, non colinéaire à I_3 et de trace nulle. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B .
 i) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $(x, g(x))$ est libre.
 ii) En déduire que B est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & a & b \\ 0 & c & -a \end{pmatrix}$ avec α, β, a, b et c dans $\mathbb{R}$.
 iii) Montrer que B est semblable à une matrice de diagonale nulle.

1594. [CCINP] Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = -f$.

- a) Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$
 b) Montrer que $\text{Ker}(f^2 + \text{id}) \subset \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f^2 + \text{id})$.
 c) Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ et $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.
 d) Montrer que $\text{Im}(f)$ est stable par f . Soit g l'endomorphisme induit par f sur $\text{Im } f$. Montrer que $g^2 = -\text{id}_{\text{Im}(f)}$.
 e) À l'aide du déterminant, montrer que le rang de f est pair et que $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$.
 f) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1595. [IMT] On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ lorsque son polynôme caractéristique est donné par $\chi_M(X) = \prod_{k=1}^n (X - m_{k,k})$. Étudier cette propriété sur les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

1596. [CCINP] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer le rang de A .
 b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres.

1597. [CCINP] Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(1 - X) + P(0)X^n$.

- a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
 b) Montrer que $\Phi^2(1) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k X^k$.

- c) Expliciter A^2 . Montrer que A^2 est triangulaire.
- d) Déterminer $\text{Im}(\Phi)$ et $\text{Ker}(\Phi)$.
- e) Déterminer les valeurs propres complexes de A^2 puis celles de A .
- f) La matrice A est-elle diagonalisable ?

1598. [CCINP] a) Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que A_0 est diagonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable avec un noyau de dimension 2. On pose $C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et

$B = \begin{pmatrix} \alpha A & \gamma A \\ \beta A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ et $\beta \neq -\gamma$.

- b) Exprimer χ_C en fonction de χ_A et trouver les valeurs propres de C .
- c) Exprimer χ_B en fonction de χ_A et trouver les valeurs propres de B .
- d) Montrer que, si $X \in \text{Ker}(A)$, alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(B)$.
- e) Montrer que $\dim(\text{Ker}(B)) \geq 2 \dim(\text{Ker}(A))$.
- f) Diagonaliser B pour $A = A_0$ avec $\alpha = -1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 1$.

1599. [CCINP] a) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Préciser les valeurs propres et les vecteurs propres de M .

b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ linéaire telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le complexe $\varphi(M)$ soit valeur propre de M .

1600. [CCINP] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} > 0$ et $\sum_{k=1}^n a_{i,k} = 1$.

- a) Montrer que 1 est valeur propre de A .
- b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq 1$.
- c) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A et si $|\lambda| = 1$ alors $\lambda = 1$.
- d) Montrer que le sous-espace propre $E_1(A)$ est une droite.

1601. [CCINP] a) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

- i) Déterminer une base et préciser la dimension de $\text{Ker}(f)$. Déterminer une base et préciser la dimension de $\text{Im}(f)$.
- ii) Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.
- iii) Montrer que $X(X-1)^2$ annule f .
- b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ non injectif tel que $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = \mathbb{R}^n$.
- i) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est de la forme

$\begin{pmatrix} S & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ avec $S \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$.

ii) Soit P_S le polynôme caractéristique de S . Montrer que $P_S(0) \neq 0$ et que $XP_S(X)$ annule u .

c) Réciproquement, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel qu'il existe un polynôme P vérifiant $P(0) \neq 0$ et $XP(X)$ annule u .

i) Montrer que $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(P(u)) = \{0\}$.

ii) Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(P(u))$, puis que $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = \mathbb{R}^n$.

1602. [IMT] Soient $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que 0 est valeur propre de A .

b) Montrer que X est un vecteur propre de A .

c) En déduire le polynôme caractéristique de A .

1603. [CCINP] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $T_n(P) = (nX + 1)P + (1 - X^2)P'$.

a) Calculer $T_n(X^k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

b) Montrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Écrire la matrice de T_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. T_2 est-il diagonalisable ?

d) Soit λ une valeur propre de T_n . On considère $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un vecteur propre de T_n associé

à λ . Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} dt$.

e) Vérifier que $x \mapsto P(x)e^{g_\lambda(x)}$ est constante sur $] -1, 1[$.

f) Vérifier que $\frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} = \frac{n + 1 - \lambda}{2} \frac{1}{1 - t} + \frac{1 - n - \lambda}{2} \frac{1}{1 + t}$ et en déduire l'expression de $g_\lambda(x)$.

g) Déterminer les éléments propres de T_n et montrer que T_n est diagonalisable.

1604. [CCINP] Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et u un vecteur de E . Montrer que l'application $f : x \mapsto x - \langle x, u \rangle u$ est un endomorphisme de E . Étudier sa diagonalisabilité, ses éléments propres.

1605. [IMT] Soient $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

a) Exprimer A en fonction de I , J et J^2 .

b) Déterminer le polynôme caractéristique de J . La matrice J est-elle diagonalisable ?

c) Diagonaliser A .

1606. [CCINP] Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et a un vecteur unitaire de E . Soit $\varphi : (x, y) \in E^2 \mapsto \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que φ soit un produit scalaire.

1607. [CCINP] Soit E un espace euclidien. Soit $(a, b) \in E^2$ une famille libre de vecteurs unitaires. Soit $\varphi : E \rightarrow E$, $x \mapsto \langle a, x \rangle b + \langle x, b \rangle a$.

- a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
 b) Déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Ker}(\varphi)$.

1608. [CCINP] Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et (a, b) une famille de vecteurs de E . Soit $\varphi : x \in E \mapsto \langle x, a \rangle b - \langle x, b \rangle a$.

- a) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle \varphi(x), y \rangle = -\langle x, \varphi(y) \rangle$.
 b) Montrer que $\text{Ker}(\varphi)^\perp = \text{Im}(\varphi)$.

1609. [CCINP] Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2. On suppose que $g = f + f^2 + f^3$.

- a) Montrer que, si f est diagonalisable, alors g l'est également.
 b) Montrer que si les valeurs propres de f sont deux-à-deux distinctes, celles de g aussi.
 c) Que dire d'une matrice symétrique réelle ? Trouver un contre-exemple avec une matrice symétrique complexe.

1610. [CCINP] Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que $\text{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$. Puis montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

Analyse

1611. [CCINP] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$. On considère une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Donner un exemple de matrice non nulle dont l'unique valeur propre est 0. La fonction ρ est-elle une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

b) i) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, calculer XX^T puis montrer que $\|XX^T\| \neq 0$.

ii) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$. *Indication :* pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on pourra montrer l'existence de $X \neq 0$ tel que $AXX^T = \lambda XX^T$.

c) On pose, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

i) Montrer que $\| \cdot \|$ vérifie : $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

ii) On définit $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $s_{i,j} = 1/2$ lorsque $|i - j| = 1$ et $s_{i,j} = 0$ sinon. Pour $\lambda \in \text{Sp}(S)$, justifier l'existence de $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = \cos \theta$.

iii) Pour $k \in [1, n]$, on pose $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$ et $X_k = (\sin(\theta_k) \sin(2\theta_k) \cdots \sin(n\theta_k))^T$.

Calculer SX_k pour $k \in [1; n]$ et en déduire les valeurs propres de S .

1612. [IMT] Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$,

$\|u(x)\| \leq \|x\|$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k(x)$ et $w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k(x)$.

a) Calculer $v_n(x)$ et $w_n(x)$ dans le cas où $x \in \text{Ker}(u - \text{id})$ et dans le cas où $x \in \text{Im}(u - \text{id})$.

b) Discuter de la convergence de $(v_n(x))$ et de $(w_n(x))$ en fonction des propriétés spectrales de u .

c) Que dire si u est nilpotente ?

1613. [CCINP] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ et $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$.

- a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$. Calculer $\|A\|$ et $\rho(A)$.
- b) Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
- c) Soit λ une valeur propre de A et $X = (x_1 \cdots x_n)^T$ un vecteur propre associé. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j|$. En déduire que $\rho(A) \leq \|A\|$.
- d) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N}$, $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.
- e) On suppose A diagonalisable. Montrer que $A^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

1614. [CCINP] Soient $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$. Étudier la convergence de la suite. Chercher les deux termes suivants du développement asymptotique.

1615. [CCINP] Considérons la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$. Posons

$v_n = 1 - u_n$. On rappelle que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.

- a) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $\frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$.
- b) Montrer, par récurrence sur n , que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
- c) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite que l'on notera ℓ .
- d) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k} = \frac{1}{2 - v_k}$.
- e) Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k} \right)$.
- f) En utilisant le lemme de Cesàro, déterminer la limite de $\left(\frac{n}{v_n} \right)$, puis un équivalent $u_n - \ell$.

1616. [CCINP] a) Calculer $\sup\{n^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

b) Comparer e^π et π^e .

1617. [CCINP] Soit $E = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2, x^y = y^x\}$.

- a) Montrer que $(x, y) \in E$ si et seulement si $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.
- b) Déterminer les $x > 0$ tels que $(x, x^2) \in E$.
- c) Dresser le tableau de variation de $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.
- d) Soit $x \in]0, 1]$. Montrer qu'il n'existe pas de $y > x$ tel que $(x, y) \in E$.
- e) Soit $x \in]1, e[$. Montrer qu'il existe un unique $y > x$ tel que $(x, y) \in E$. On note $\psi(x)$ cet unique y .
- f) Montrer que $\psi :]1, e[\rightarrow]0, 1/e[$ est continue et strictement décroissante.
- g) Déterminer tous les $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $x < y$ et $(x, y) \in E$.

1618. [IMT] Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer un DL à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

1619. [CCINP] On pose $f(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

- Trouver une primitive de $x \mapsto \frac{2x-1}{x^2}$ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.
- En posant $x = \frac{1}{u}$, donner la limite à droite et à gauche en 0 de f , et étudier la continuité à droite et à gauche en 0, puis la dérivabilité à droite et à gauche en 0.
- Résoudre $x^2y' + (2x-1)y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.
- On admet que $P_1(X) = 1-2X$, $P_2(X) = 1-6+6X^2$, $P_3(X) = 1-12X+36X^2-24X^3$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0?

1620. [CCINP] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que g ne s'annule pas. On pose $F : x \mapsto \int_a^x f(t)g(t)dt$ et $G : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$.

a) Énoncer le théorème de Rolle.

b) Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Montrer que $\int_a^b f(t)g(t)dt = G(b)f(b) - \int_a^b G(t)f'(t)dt$.

c) On pose $h : x \mapsto F(b)G(x) - F(x)G(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $F(b)G'(c) = F'(c)G(b)$ puis montrer que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt$.

d) On suppose que f' ne s'annule pas. En appliquant la question précédente, montrer que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt + f(b) \int_c^b g(t)dt$.

e) On suppose f positive et décroissante. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt$.

1621. [CCINP] Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

1622. [ENSEA] a) Soit (g_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et soit X une partie de $\mathbb{R}$. Que signifie : « la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers g sur X » ?

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1}e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

b) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .

c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

- d)* Soit $a > 0$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
e) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

1623. [CCINP] On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \in [-1, 1] \mapsto \sin(nx)e^{-nx^2}$.

- a)* Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction F que l'on déterminera.
b) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, 1]$ avec $a \in]0, 1[$.
c) Y a-t-il convergence uniforme sur $[-1, 1]$?

1624. [CCINP] Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n!}$.

- a)* Étudier les modes de convergence (simple, normale, uniforme) de la série $\sum u_n$.
b) Calculer $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout réel x .

1625. [CCINP] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n k^n$.

- a)* Montrer que $S_n \rightarrow +\infty$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k(x) = \begin{cases} e^{-k} & \text{si } x = 0 \\ (1 - kx)^{\frac{1}{x}} & \text{si } 0 < x < \frac{1}{k} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{k} \end{cases}$.

Montrer que f_k est continue sur $\mathbb{R}^+$.

- c)* Montrer que l'application $F : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

- d)* Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{S_n}{n^n}$.

- e)* Trouver $C > 0$ tel que $S_n \sim_{n \rightarrow +\infty} Cn^n$.

1626. [CCINP] Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient $f_0 \in E$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \mapsto \int_0^x f_n(t) dt$.

- a)* Préciser le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

- b)* Montrer que, pour $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser f'_n . Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$.

- c)* On suppose pour l'instant la propriété $(*)$: pour tout $r > 0$, il existe $K > 0$ tel que, pour tout $x \in [-r, r]$, $|f_n(x)| \leq K \frac{|x|^n}{n!}$. Montrer alors l'existence de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$

puis montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

- d)* Toujours sous l'hypothèse $(*)$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) - F(x) = f_0(x)$. En déduire que, pour tout x , $F(x) = e^x \int_0^x f_0(t) e^{-t} dt$.

- e)* Montrer l'hypothèse $(*)$.

1627. [CCINP] Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum \frac{\text{ch}(n)}{n} x^n$.

1628. [CCINP] Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = e^{n\theta}$ et $b_n = \sum_{k=0}^n e^{k\theta}$. Rayon de convergence et somme des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$?

1629. [IMT] *a)* Montrer que, pour $x \in]-1, 1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$.

b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ en précisant le domaine de convergence, et s'il y a convergence au bord.

c) Même question avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$.

1630. [CCINP] *a)* Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\text{sh}(\alpha) = 1$.

b) Montrer que $\text{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^\alpha \text{sh}^n(t) dt$. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) Calculer I_0 et I_1 .

d) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)I_{n+2} + (n+1)I_n = \sqrt{2}$.

e) Montrer que $I_n \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

f) On considère $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} I_n x^n$. Préciser le domaine de définition.

g) Montrer que $f(x) = \int_0^\alpha \frac{1}{1 - x \text{sh}(t)} dt$.

1631. [CCINP] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n(t)$ selon les valeurs de $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = 0$.

c) Grâce à une intégration par parties, montrer que $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$.

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \neq 0$ et en déduire le rayon de convergence de $g : x \mapsto \sum_{n \geq 0} u_{2n+1} x^{2n+1}$.

e) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $(x^2 - 1)g''(x) + 3xg'(x) + g(x) = 0$.

f) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 - x \cos(t)} dt$.

1632. [CCINP] Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt$ et l'exprimer comme somme d'une série.

1633. [IMT] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$. Préciser le domaine de définition de F . Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer F' . En déduire F .

1634. [IMT] Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

a) Montrer que $x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer l'existence de $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt = \frac{K}{1+x^2}$.

c) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\varphi'(x)$ avec une intégrale, en déduire φ .

1635. [CCINP] Étudier $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} dt$.

1636. [CCINP] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$.

a) Préciser le domaine de définition de f .

b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = 2n(f(n) - f(n+1))$.

c) En déduire que $f(n) = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1}(n-1)!}$.

d) Étudier la monotonie de f .

e) Montrer que f est continue.

f) Préciser la nature de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

g) Trouver un équivalent de f en $+\infty$ et proposer une autre approche pour la question la précédente.

1637. [CCINP] a) Résoudre $y'(x) + 2\pi xy(x) = 0$ et $y(0) = 1$.

On donne $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n : t \mapsto t^n \exp(-\pi t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt$.

d) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t) \exp(2i\pi xt) dt$.

Montrer que B_n est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer que $B_0(x) = \exp(-\pi x^2)$.

f) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \in E$, où E est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f(x) = P(x) \exp(-\pi x^2)$ où P est un polynôme.

1638. [CCINP] Solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2x^2y' + y = 1$?

1639. [ENSEA] Résoudre $y'' - 5y' + 4y = e^t \sin t$.

1640. [IMT] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On cherche les fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ qui vérifient $(P) : (y'' - y = f, y'(0) = y(0), y'(1) = -y(1))$. On admet l'existence d'une solution g_0 de l'équation différentielle $y'' - y = f$.

a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - y = f$ en fonction de g_0 .

b) Montrer que (P) admet une unique solution à déterminer en fonction de g_0 et g'_0

c) Montrer que $x \mapsto -\frac{e^x}{2} \int_x^1 f(t)e^{-t} dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x f(t)e^t dt$ est la solution de (P) .

1641. [CCINP] Soit $f : (x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 - y^2$.

a) Montrer que f possède un minimum local sur $\mathbb{R}^2$.

b) Ce minimum local est-il global ?

1642. [CCINP] On considère $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^2y + y(\ln(y))^2$.

a) Déterminer les points critiques de f .

b) Déterminer les extrema locaux et globaux de f .

1643. [CCINP] Soit $f : (x, y) \mapsto x \ln(y) - y \ln(x)$.

a) Montrer que le point (e, e) est un point critique.

b) Calculer, de deux manières différentes, un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto f(x - e, x + e)$. Qu'en déduire ?

1644. [CCINP] Soit $f : (x, y) \mapsto xe^y + ye^x$. Trouver les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Préciser leur nature.

1645. [CCINP] Soient $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 - y^2$ et $C = \{(x, y), h(x, y) = 0\}$.

a) Montrer que h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, puis montrer que $(0, 0)$ est le seul point critique de h . La fonction h admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x, y) = 0$ pour tout (x, y) dans C .

i) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t^2, t^3) = 0$. En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

ii) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_t : u \mapsto f(t^2, u)$. Justifier que φ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in]-t^3, t^3[$ tel que $\varphi'_t(\gamma(t)) = 0$

iii) Conclure que $(0, 0)$ est un point critique pour f .

c) Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble C .

Probabilités

1646. [IMT] Un secrétaire réalise n appels vers des correspondants distincts, de manière indépendante. On note $p \in]0, 1[$ la probabilité d'obtenir le correspondant appelé. On note X le nombre de correspondants obtenus après le premier appel. On rappelle ensuite les cor-

respondants n'ayant pas répondu la première fois. On note Y le nombre de correspondants répondant au second appel. Soit $Z = X + Y$.

- a) Quelle est la loi de X ? Justifier.
- b) Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(Y = k \mid X = i)$.
- c) Quelle est la loi de Z ? Calculer son espérance et sa variance.

1647. [Navale] Soient X, Y deux variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. Trouver la loi de $Z = |X - Y|$ puis calculer son espérance.

1648. [Saint-Cyr] On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$.

- a) Calculer la probabilité que la séquence PF apparaisse pour la première fois avec P au $(n - 1)$ -ème lancer et F au n -ème.
- b) Calculer la probabilité que la séquence PF apparaisse au moins une fois.
- c) Calculer la probabilité que la séquence PP apparaisse pour la première fois sans être précédée par la séquence PF

1649. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soient $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

- a) Déterminer la loi du couple (U, V) , puis celle de U .
On admet que, pour $n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
- b) Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V .
- c) Les variables U et V sont-elles indépendantes?

1650. [CCINP] a) La matrice $\begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

b) Soient X_1, X_2, X_3, X_4 i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1/2)$. Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

1651. [IMT] Soit $M = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ avec X_1, X_2 indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.

1652. [IMT] Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = \frac{1 + a^k}{4 \times k!}$ où $a \in \mathbb{R}$.

- a) Déterminer a .
- b) Déterminer l'espérance de X .
- c) Déterminer la loi de $X + Y$.

1653. [IMT] On lance indéfiniment une pièce faisant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « obtenir deux Pile consécutifs pour la première fois au bout du $n^{\text{ème}}$ lancer » et $a_n = P(A_n)$.

- a) Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4 .
- b) Déterminer une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n .

c) Montrer qu'il est quasi-certain qu'on obtienne deux Pile consécutifs.

1654. [CCINP] Soient $p, q \in]0, 1[$. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$. On définit la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(U > k)$.

b) Déterminer la loi de U .

c) Calculer l'espérance et la variance de U .