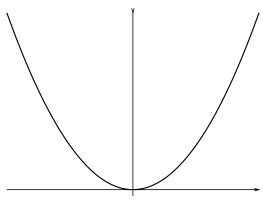
Partie I Propriétés de la transformée de Legendre

I.A.1 La fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto px - kx^2$ est une fonction polynôme de degré 2, à coefficient dominant négatif. Elle est donc majorée.

Son maximum est atteint en $\dfrac{-p}{-2k} = \dfrac{p}{2k}$, et vaut :



$$p\frac{p}{2k} - k\left(\frac{p}{2k}\right)^2 = \frac{p^2}{2k} - \frac{p^2}{4k} = \frac{p^2}{4k}$$

On a par conséquent :

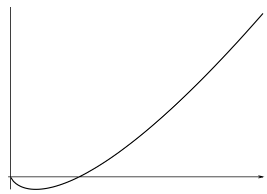
$$\boxed{\mathrm{J}(f) = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g(p) = \frac{1}{4k}p^2}$$

I.A.2 La fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto px - e^x$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Par contre, son comportement en $-\infty$ dépend du signe de p :

– Si $p < 0$, $\mathrm{F} : px - e^x$ tend vers $+\infty$ et donc la fonction F n'est pas majorée, et $p \notin \mathrm{J}(f)$.

– Si $p = 0$, $-e^x$ tend vers 0, de plus 0 majore F. Donc $0 \in \mathrm{J}(f)$ et $g(0) = 0$.

– Si $p > 0$, $px - e^x$ tend vers $-\infty$. La fonction étant $\mathcal{C}^1$ on peut chercher un maximum en cherchant où s'annule la dérivée : $\mathrm{F}'(x) = p - e^x$. La dérivée s'annule en un seul point, $\ln p$. Finalement,



$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{J}(f) = \mathbb{R}_+ \\ \begin{cases} g(p) = p\ln p - p & \text{pour} \quad p > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \end{array}}$$

Remarquons que la fonction est continue en 0.

I.A.3 La fonction Arctan est bornée sur $\mathbb{R}$. Distinguons suivant le signe de p. Lorsque $p > 0$, en $+\infty$, $\mathrm{F} : px - \operatorname{Arctan} x$ tend vers $+\infty$, la fonction n'est pas majorée.

De façon analogue, si $p < 0$, $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{F} = +\infty$.

Dans le cas où $p = 0$, la fonction $\mathrm{F}(x) = -\operatorname{Arctan} x$ est majorée.

$$\boxed{\mathrm{J}(f) = \{0\} \quad \text{et} \quad g(0) = \frac{1}{2}\pi}$$

I.B.1 Si a et b sont dans $\mathrm{J}(f)$, les fonctions

$$\mathrm{F}_a : x \mapsto ax - f(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_b : x \mapsto bx - f(x)$$

sont majorées.

Soient $t \in [\,0\,;1\,]$ et $c = ta + (1-t)b$. Exprimons la fonction $\mathrm{F}_c : x \mapsto cx - f(x)$ en fonction de F_a et F_b :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_c(x) &= cx - f(x)\\
&= (ta + (1-t)b)\,x - (t + 1 - t)f(x)\\
&= t\,(ax - f(x)) + (1-t)(bx - f(x))\\
\mathrm{F}_c(x) &= t\mathrm{F}_a(x) + (1-t)\mathrm{F}_b(x)
\end{aligned}$$

Si M et M′ sont des majorants de F_a et F_b, on a, comme $t \geqslant 0$ et $(1-t) \geqslant 0$:

$$\mathrm{F}_c(x) \leqslant t\mathrm{M} + (1-t)\mathrm{M}'$$

F_c est ainsi bien majorée ; il vient $c \in \mathrm{J}(f)$. $\mathrm{J}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathrm{J}(f) \text{ est un intervalle.}}$$

> Ici, comme dans les deux questions suivantes, aucune hypothèse particulière n'est faite sur f, même pas la continuité. On ne peut pas du tout assurer que la borne supérieure soit atteinte pour les fonctions intermédiaires introduites.
>
> Il faut revenir à la définition de la borne supérieure d'un ensemble (ou d'une fonction) : le plus petit des majorants.

I.B.2 En reprenant les notations utilisées à la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \begin{aligned}\mathrm{F}_c(x) &= t\mathrm{F}_a(x) + (1-t)\mathrm{F}_b(x)\\ &\leqslant tg(a) + (1-t)g(b)\end{aligned}$$

$g(c)$ étant le plus petit des majorants de F_c, on a forcément :

$$g\,(ta + (1-t)b) \leqslant tg(a) + (1-t)g(b)$$

$$\boxed{g \text{ est convexe.}}$$

I.B.3.a Supposons que $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+$. Soient $b \in \mathrm{J}(f)$, $a \in \mathrm{J}(f)$, et $a \leqslant b$, on a :

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad ax \leqslant bx$$

Et donc $$\forall x \in \mathrm{I} \quad ax - f(x) \leqslant bx - f(x)$$

En prenant les bornes supérieures sur I des deux membres, on obtient l'inégalité $g(a) \leqslant g(b)$.

$$\boxed{g \text{ est croissante.}}$$

> Remarquons que si on suppose au départ uniquement que $b \in \mathrm{J}(f)$ et $a \leqslant b$, on a l'inégalité :
>
> $$ax - f(x) \leqslant bx - f(x) \leqslant g(b)$$

et donc F_a est majorée, soit $a \in J(f)$. $J(f)$ contient $]-\infty\,;b]$. La borne inférieure de l'intervalle $J(f)$ est $-\infty$.

I.B.3.b On fait le raisonnement analogue. L'inégalité devient, comme $x \leqslant 0$:

$$ax - f(x) \geqslant bx - f(x)$$

et donc $g(a) \geqslant g(b)$.

$$\boxed{g \text{ est décroissante.}}$$

Comme au-dessus on peut démontrer que la borne supérieure de $J(f)$ est $+\infty$. On suppose là que $a \in J(f)$.

Notez que la même fonction restreinte à des intervalles différents, donnera tantôt des fonctions croissantes, tantôt décroissantes, ou ni croissantes, ni décroissantes (comme à la question I.A.1). La transformée de Legendre est une transformation globale : sa valeur en un point dépend de l'ensemble du comportement de la fonction.

I.C.1 Essayons d'établir le tableau de variation de F. On a la dérivée de $F : x \mapsto px - f(x)$

$$F'(x) = p - f'(x)$$

Comme $f'' > 0$, f' est strictement croissante. F' est donc strictement décroissante.

Soit $p \in\,]\,\alpha\,;\beta\,[$. Il existe un $z \in I$ tel que $f'(z) = p$. Il est unique car f' est strictement croissante. En ce point, F' s'annule. On peut ébaucher les variations de F :

		z	
F'	$+$	0	$-$
F	$\nearrow$		$\searrow$

F est majorée. Donc $p \in J(f)$. Ce qui montre bien :

$$\boxed{]\,\alpha\,;\beta\,[\, \subset J(f)}$$

F a un maximum unique en ce point z, qu'on peut désigner par $x(p)$. C'est le point tel que $f'(x(p)) = p$, autrement dit :

$$\boxed{x(p) = {f'}^{[-1]}(p)}$$

On peut maintenant expliciter $g(p) = F(x(p))$:

$$\boxed{g(p) = px(p) - f(x(p)) = p{f'}^{[-1]}(p) - f\left({f'}^{[-1]}(p)\right)}$$

I.C.2 Comme $x(p)$ est la fonction réciproque de f', qui est $\mathcal{C}^1$, et que la dérivée f'' ne s'annule pas, $x(p)$ est dérivable.

Par conséquent, $g : p \mapsto px(p) - f(x(p))$ est dérivable et sa dérivée est :

$$\begin{aligned} g'(p) &= x(p) + p\,x'(p) - x'(p)\,f'(x(p)) \\ &= x(p) + p\,x'(p) - x'(p)\,p \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(p) \;=\; x(p)}$$

> Comme dans beaucoup de calculs, on a intérêt ici à ne pas tout calculer de suite. Faire intervenir l'expression explicite de $x'(p)$ n'aurait fait que compliquer les choses !

I.C.3 La droite D_p passe par le point de coordonnées $\mathrm{M}\Big(x(p), f(x(p))\Big)$. En effet, $f(x(p)) = px(p) - g(p)$.

En outre, la droite est de pente $p = f'(x(p))$, qui est bien la dérivée de f en $x(p)$.

$$\boxed{\text{La droite } \mathrm{D}_p \text{ est tangente en M au graphe de } f.}$$

On peut par ailleurs remarquer que f est convexe, et que son graphe est au-dessus de la tangente D_p.

I.C.4.a Soient $h \in \mathcal{H}$ et $g = \mathcal{L}(h)$. Comme $h'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{J}(h) = \mathbb{R}$ d'après la question I.C.1. La dérivée de g est $x(p)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, comme réciproque d'une fonction $\mathcal{C}^1$.

$$\boxed{g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

h' est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc sa réciproque $x(p)$, soit $g'(p)$, est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $g'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$$\boxed{g'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $g''(x) > 0$. Il faut dériver $x(p)$, fonction réciproque de h' :

$$x'(p) = \frac{1}{h''(h'^{[-1]}(p))} = \frac{1}{h''(x(p))}$$

On a bien : $g''(x) = x'(p) > 0$.

> On aurait pu aussi remarquer que $x(p)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et donc que sa réciproque $g'(x)$ l'est aussi.

Les trois conditions sont vérifiées :

$$\boxed{\mathcal{L}(h) \in \mathcal{H}}$$

I.C.4.b Soit $h \in \mathcal{H}$, soit $g = \mathcal{L}(h)$. D'après la définition de g, pour tout x et p dans $\mathbb{R}$,

$$g(p) \geqslant px - h(x)$$

c'est-à-dire

$$h(x) \geqslant xp - g(p)$$

À x fixé, la fonction

$$p \mapsto xp - g(p)$$

est majorée par $h(x)$. En outre, on a l'égalité lorsque $x = x(p)$, c'est-à-dire si $p = h'(x)$. Donc $h(x)$ est la borne supérieure de cette fonction, ce qui est la définition de la transformée de Legendre de g.

On a bien :

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{L}(h)) = h}$$

> Au lieu de se ramener à la définition, on aurait pu choisir d'appliquer à g l'expression obtenue à la question I.C.1. La fonction $g'(p) = x(p)$ a pour réciproque $h'(x)$. D'où
>
> $$\begin{aligned} \mathcal{L}(g)(x) &= x\,h'(x) - g(h'(x)) \\ &= x\,h'(x) - \Big[h'(x)\,x(h'(x)) - h(x(h'(x)))\Big] \\ &= x\,h'(x) - h'(x)\,x + h(x) \\ \mathcal{L}(g)(x) &= h(x) \end{aligned}$$

I.C.4.c Puisque $\mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{L}$ est une bijection, qui est sa propre réciproque.

> L'un des moyens de démontrer qu'une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une bijection, est d'expliciter l'application réciproque. Il faut ainsi vérifier qu'il existe $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ tel que
>
> $$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{F}} \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$$
>
> Il faut vérifier les **deux** compositions. Ici elles coïncident.