

Espaces préhilbertiens

1 _____ (*) _____

Notons E l'ensemble de fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel des éléments de E qui s'annulent en 0 et en 1. Déterminer $F^\perp$ pour le produit scalaire

$$f|g = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

2 _____ (**) _____

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$P|Q = \int_a^b P(t)Q(t) dt$$

(a). Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les polynômes $Q_1, \dots, Q_n$ par

$$Q_1(x) = \int_a^x P_n(t) dt \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket, \quad Q_k(x) = \int_a^x Q_{k-1}(t) dt$$

Montrer que ces éléments sont divisibles respectivement par $(X-a)(X-b)$, $(X-a)^2(X-b)^2$, $\dots$, $(X-a)^n(X-b)^n$.

(c). En déduire que pour tout entier n , il existe un réel k_n à déterminer tel que

$$P_n = k_n [(X-a)^n(X-b)^n]^{(n)}$$

3 _____ (**) _____ **CCP PC 2011**

Soit $E = \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur E en posant

$$f|g = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$$

et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On pose

$$\mathcal{V} = \{f \in E, f'' = f\} \quad \mathcal{W} = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \{f \in E, f(0) = \text{ch}(1) \quad \text{et} \quad f(1) = 1\}$$

(a) Montrer que (ch, sh) est une base de $\mathcal{V}$.

(b) Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in E$, montrer que

$$f|g = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$$

Calculer $\text{ch}|\text{sh}$, $\|\text{ch}\|^2$ et $\|\text{sh}\|^2$.

(c) Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{W}$, montrer que $f|g = 0$.

(d) Soit $f \in \mathcal{H}$. Calculer $f|\text{ch}$ et $f|\text{sh}$. En déduire les coordonnées dans la base (ch, sh) de la projection orthogonale de f sur $\mathcal{V}$.

(e) Déterminer $\inf \left\{ \int_0^1 (f'(t)^2 + f(t)^2) dt, f \in \mathcal{H} \right\}$.

(f) Montrer que $\mathcal{W}$ est l'orthogonal de $\mathcal{V}$.

Espaces euclidiens

4 _____ (*) _____

Soit x et y deux vecteurs distincts d'un espace E euclidien de dimension supérieur ou égale à 2. On suppose que $(x|y) = \|y\|^2$. Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que la projection orthogonale de x sur H soit égale à y .

5 _____ (**) _____

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Démontrer l'existence et l'unicité d'une base $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ de E telle que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad (e_i|f_j) = \delta_{i,j} \quad (\star)$$

6 _____ (**) _____ **Mines PC 2010**

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ 1-lipschitzienne. Montrer que $E = \text{Im}(u - I_d) \oplus^\perp \text{Ker}(u - I_d)$.

7 _____ (**) _____

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

- (a). Soient $f_1, \dots, f_n \in E$ tels que $\sum_{k=1}^n \|f_k\|^2 < 1$. Montrer que la famille $(e_i + f_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de E .
- (b). Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs unitaires tels que $\sum_{k=1}^n (v_k | e_k) > n - \frac{1}{2}$. Montrer que $(v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de E .

8 _____ (**) _____ **X PC 2010**

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer

$$\sup \left\{ \int_{-1}^1 xP(x), P \in E / \int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 P(t) dt = 0 \right\}$$

Endomorphismes et matrices orthogonales

9 _____ (*) _____

Soit f un endomorphisme orthogonal de E euclidien.

- (a). Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $(f(F))^\perp = f(F^\perp)$.
- (b). Si $F = \text{Ker}(f - I_d)$, montrer que $f(F^\perp) = F^\perp$.

10 _____ (*) _____

Soit E un espace euclidien, a un élément non nul de E et enfin α un réel non nul. On note

$$f : E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x + \alpha(a|x)a$$

- (a). Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
- (b). A quelle condition sur a et α l'endomorphisme f est-il orthogonal? Quelle est alors sa nature géométrique?

11 _____ (**) _____

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique. On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

- (a). Montrer que $A + I_3$ est inversible, puis que $\Omega = (A + I_3)^{-1}(I_3 - A)$ est orthogonale.
- (b). Justifier que -1 n'est pas valeur propre de Ω . Que peut-on dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à Ω ?
- (c). Réciproquement, toute élément de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ n'admettant pas le réel -1 pour valeur propre peut-il s'écrire sous forme $(A + I_3)^{-1}(I_3 - A)$ avec A antisymétrique?

Endomorphismes symétriques

12 _____ (**) _____

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que f a une trace nulle si et seulement si il existe une base orthonormée dans laquelle f a une matrice dont la diagonale ne comporte que des 0.

13 _____ (*) _____ **CCP PC 2009**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{10} = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

14 _____ (***) _____

Soit E un espace euclidien et p, q deux projections orthogonales de E .

- (a). Montrer que le spectre de $p + q$ est non vide.
- (b). Soit λ une valeur propre de $p + q$ et x un vecteur propre associé. Montrer que $\text{Vect}\{x, p(x)\}$ est stable à la fois par p et par q . En déduire que E est somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 1 ou 2 stables par p et q .
- (c). Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

15 _____ (**) _____

Soient $a < b$ deux réels et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \quad \text{avec} \quad \forall i, j, \quad a_{i,j} = \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt$$

- (a). Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ puis que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
 (b). En déduire que $(1/(i+j-1))_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

16 _____ (**) _____ **Mines PC 2008**

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = A^3 + A + I_n$. Justifier qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(B)$.

17 _____ (*) _____

Soit E un espace euclidien et $f, g \in \mathcal{S}(E)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

- (i) f et g commutent.
 (ii) $f \circ g \in \mathcal{S}(E)$.
 (iii) f et g admettent une base commune de vecteurs propres.

18 _____ (**) _____

Soit n un entier. Notons $E = \mathbb{R}_n[X]$ et considérons $u : E \longrightarrow E$ définie par

$$u(P) = (1 + X^2)P' - nXP \quad \text{d'où} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(P)(x) = (1 + x^2)^{1+n/2} \frac{d}{dx} \left(\frac{P(x)}{(1 + x^2)^{n/2}} \right)$$

- (a). Vérifier que l'application suivante est bien définie et est un produit scalaire sur E

$$(R, S) \longrightarrow R|S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(t)S(t)}{(1 + t^2)^{n+1}} dt$$

- (b). Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique pour le produit scalaire ci-dessus, c'est-à-dire que

$$\forall R, S \in E, \quad (u(R)|S) = -(R|u(S))$$

Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

19 _____ (**) _____ **X PC 2010**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

- (a) Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
 (b) Montrer que $\det(A + I_n) \geq 1$.
 (c) Montrer que pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det(A + S) \geq \det(S)$.

20 _____ (**) _____

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr } AU \leq \text{Tr } A$ avec égalité si et seulement si $AU = A$.

21 _____ (*) _____ **CCP PC 2019**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \cdot A^T \cdot A = I_n$. Montrer que A est diagonalisable puis que $A = I_n$.

Exercices supplémentaires non corrigés

22 _____ (?) _____ **ENS PC 2024**

Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \dots, f_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \exists i \in \llbracket 1; k \rrbracket, \quad (x|f_i) > 0$$

- (a). Donner un exemple de famille de $\mathbb{R}^n$ vérifiant cette propriété.
 (b). Montrer que $(f_1, \dots, f_k)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

23 _____ (?) _____ **Mines PC 2024**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est antisymétrique si et seulement si pour toute matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $P^T M P$ est à diagonale nulle.

24 _____ (**) _____ **ENS PC 2024**

Soit E un espace euclidien, a un endomorphisme auto-adjoint et $u \in E$ non nul. On note $V = \text{Vect} \{a^k(u), k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que l'endomorphisme induit par a sur V n'a que des valeurs propres simples.

25 _____ (**) _____ **ENS PC 2024**

(a). Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) S admet k valeurs propres positives (comptées avec multiplicité).

(ii) Il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $\dim F = k$, $\dim G = n - k$ et

$$\forall X \in F, \quad X^T S X \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall X \in G, \quad X^T S X \leq 0$$

(b). Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^T S P$ et S ont le même nombre de valeurs propres positives.

26 _____ (*) _____ **X PC 2024**

Montrer que pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (B, C) de matrices symétriques positives telles que

$$A = B - C \quad \text{et} \quad BC = CB = 0$$

27 _____ (**) _____ **X PC 2024**

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement supérieures à 1. Montrer que les valeurs propres de AB sont strictement supérieures à 1.

28 _____ (?) _____ **X PC 2024**

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi_k(H) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i H A^{k-1-i}$$

(a). Montrer que φ_k est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(b). A quelle condition φ_k est-elle injective ? surjective ? bijective ?

29 _____ (*) _____ **Mines PC 2024**

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ et un ouvert Ω dense dans E tel que

$$\forall x \in \Omega, \quad \frac{\|u^{k+1}(x)\|}{\|u^{k+1}(x)\|} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} m$$

- 1** Il s'agit de montrer que $F^\perp = \{0\}$. Soit $g \in F^\perp$. Choisir un élément f judicieux de F de sorte que $f|g$ soit l'intégrale d'une fonction continue et positive.
- 2** (a) Pour l'existence, utiliser le procédé de Schmidt. Pour l'unicité, considérer deux familles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes convenant et montrer que $A_n = B_n$ pour tout entier n par récurrence.
 (b) Pour montrer que $Q_k(b) = 0$ pour $k \leq n$, on pourra faire des intégrations par parties successives en utilisant que $Q|P_n$ est nul pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.
- 4** Un dessin permet de se rendre compte que sous réserve d'existence, H est nécessairement l'orthogonal de $x - y$. Justifier que ce dernier convient et que c'est le seul.
- 5** Raisonner par analyse-synthèse en remarquant que $\left[\text{Vect}\{e_i\}_{i \neq j}\right]^\perp$ est une droite vectorielle.
- 6** Considérer x dans $\text{Ker}(u - I_d)$ et y dans $\text{Im}(u - I_d)$. Montrer que x et y sont orthogonaux en considérant la quantité $\|u(a + \lambda x)\|^2 - \|a + \lambda x\|^2$ où λ est un réel arbitraire et a est tel que $y = (u - I_d)(a)$.
- 7** (a) Etant donnés $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$, considérer de deux façons différentes la norme du vecteur $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.
 (b) Utiliser le (a) avec une famille $(f_1, \dots, f_n)$ bien choisie.
- 8** Il s'agit de déterminer $\sup\{u|v, \|u\| = 1 \text{ et } u \in H\}$
 où $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire judicieusement choisi sur $\mathbb{R}_2[X]$ et H un hyperplan. Raisonner ensuite à l'aide du projeté orthogonal de v sur H et utiliser Cauchy-Schwarz.
- 10** Utiliser une base orthonormée de E judicieusement choisie.
- 11** (a) Calculer ${}^t\Omega \cdot \Omega$.
 (b) On pourra montrer que si X vérifie $\Omega X = -X$, alors $X = 0$ et calculer $\det \Omega$.
 (c) Commencer par calculer $\det \Omega$ dans le cas $b = c = 0$ et $a = \tan \theta$ avec $|\theta| < \pi/2$.
- 12** Si f est de trace nulle, on pourra commencer par justifier l'existence d'un vecteur u unitaire tel que $f(u)$ et u sont orthogonaux. A cet effet, introduire une base $(e_1, \dots, e_n)$ de diagonalisation de f , et considérer une combinaison linéaire judicieuse de ses éléments.
 Démontrer ensuite le résultat en raisonnant par récurrence sur la dimension de E (il sera sans doute plus commode de raisonner matriciellement).
- 13** Remarquer que le polynôme $X^{10} - 1$ n'admet que 1 et -1 comme racines réelles.
- 14** (a) Remarquer que $p + q$ est symétrique.
 (b) Utiliser le fait qu'un sous-espace stable par un endomorphisme u auto-adjoint a également son orthogonal stable par u . Pour la deuxième partie, raisonner par récurrence sur la dimension de E .
 (c) A l'aide de ce qui précède, se ramener au cas de la dimension 1 ou 2 et vérifier le résultat par le calcul dans ces deux cas.
- 15** Ecrire pour tout X dans $\mathbb{R}^n$ la quantité tXAX comme l'intégrale sur $[a; b]$ du carré d'une fonction.
- 16** Diagonaliser A et utiliser le fait que $x \mapsto x^3 + x + 1$ est injective sur $\mathbb{R}$.
- 17** Pour (i) $\Rightarrow$ (iii), raisonner par récurrence sur $\dim E$ en utilisant la stabilité par g des sous-espaces propres de f .
- 18** (b) Utiliser des intégration par parties soigneuses.
- 19** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.
 (a) Poser $B = iA$ et remarquer que tB est la conjuguée de B . Justifier alors que le spectre de B est réel à l'aide d'une preuve similaire à celle du cours pour les matrices symétriques.
 (b) On pourra trigonaliser A et utiliser le (a).
 (c) Justifier l'existence de R symétrique et inversible telle que $S = R^2$ et remarquer alors que $R^{-1}AR^{-1}$ reste antisymétrique.
- 20** Pour l'inégalité, utiliser une diagonalisation en base orthogonale et une propriété de la trace.
- 21** Montrer que A est inversible puis que A est symétrique en l'exprimant en fonction de A^{-1} .