Normes

1 (∗)

Soit p, n deux entiers et $x_0, \ldots, x_p$ des réels deux à deux distincts. L'application suivante est-elle une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$?

$$N : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \left|P(x_k)\right| \end{array}$$

2 (∗∗)

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on définit pour $(x, y) \in E$

$$N_1(x, y) = \sup_{t\in[0;1]} |xt + y| \qquad \text{et} \qquad N_2(x, y) = \sup_{t\in[-1;1]} |xt + y|$$

Démontrer qu'il s'agit de normes et déterminer un réel α maximal et un réel β minimal pour lesquels on a

$$\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$$

3 (∗∗)

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0; 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sup_{g\in B(0,1)} \left| \int_0^1 f(t)g(t)\, \mathrm{d}t \right|$$

(a). Montrer que N est une norme sur E.

(b). Montrer que $N = || \cdot ||_{1,[0;1]}$.

4 (∗∗)

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie $n \geq 1$. On considère une partie C de E convexe, compacte (c'est-à-dire fermée et bornée), symétrique (soit $x \in C$ ssi $-x \in C$) et contenant une boule de centre 0 et de rayon r strictement positif.

(a). Pour tout $x \in E$, on pose $\qquad E_x = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{x}{\lambda} \in C \right\}$

Montrer que E_x admet une borne inférieure. On note $j_C(x)$ ce réel.

(b). Montrer que $j_C : x \longmapsto j_C(x)$ est une norme sur E (appelée la jauge de C) et que C est sa boule unité.

5 (∗∗∗)

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et N_1, N_2 deux normes sur E.

(a). Montrer que l'application $N^+ = \max(N_1, N_2)$ est une norme sur E.

(b). Montrer que $\min(N_1, N_2)$ n'est pas nécessairement une norme sur E.

(c). Soit F l'ensemble des normes N sur E vérifiant $N \leq \min(N_1, N_2)$. En utilisant l'équivalence des normes en dimension finie, justifier que F est non vide puis montrer que l'application N^- définie par

$$\forall x \in E, \qquad N^-(x) = \sup_{N\in F} N(x)$$

est une norme sur E.

(d). On note B^+ la boule unité de N^+ et B^- celle de N^- et on cherche à exprimer ces deux ensembles en fonction des boules unités B_1 et B_2 des normes N_1 et N_2.

1. Montrer que $B^+ = B_1 \cap B_2$.
2. Montrer que $N_1 \leq N_2$ si et seulement si $B_2 \subset B_1$.
3. En utilisant le résultat de l'exercice sur les jauges, écrire B^- à l'aide de B_1 et B_2.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = |x| + |y|$ et $N_2(x, y) = \sqrt{2} \max(|x| , |y|)$. Dessiner les boules unités B_1, B_2, B^+ et B^-.

6 (∗∗)

Soit $E = \mathrm{Vect}\,\{f_\alpha : x \longmapsto e^{\alpha\, x}, \alpha \in \mathbb{C}\}$. Montrer que l'application suivante est une norme sur E :

$$N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}$$

7 (∗∗∗)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall f \in F, \qquad ||f||_\infty \leq C\,||f||_2$$

Montrer que F est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.

Topologie

8 (∗)

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel E de dimension finie et $x \in E$. On note

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y),\ y \in A\}$$

Comparer $d(x, A)$, $d(x, A^\circ)$ et $d(x, \overline{A})$.

9 (∗)

Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ /\ \forall i \neq j,\ x_i \neq x_j\}$$

A est-il ouvert ? fermé ?

10 (∗)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et C une partie convexe de E. Montrer que $\overset{\circ}{C}$ et $\overline{C}$ sont convexes.

11 (∗∗)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Montrer que si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite est un fermé.

12 (∗∗)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg} A = p\} \qquad \text{et} \qquad B_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg} A \leq p\}$$

Les ensembles A_p et B_p sont-ils ouverts ? fermés ?
On pourra utiliser le résultat suivant : A est de rang p si et seulement si on peut extraire une matrice B inversible de taille p de A, c'est-à-dire en supprimant $n - p$ lignes et $n - p$ colonnes à A.

13 (∗)

Soit d une distance sur un ensemble E. On dit que d est ultra-métrique si pour tout $x, y, z \in E$, on a

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)) \qquad (\star)$$

(a). Soient x, y, z tels que $d(x, y) \neq d(y, z)$. Montrer que l'inégalité $(\star)$ est une égalité.
(b). Soit $x \in E$ et $r > 0$. Montrer que $B_{x,r}$ est un fermé et que $\overline{B_{x,r}}$ est un ouvert.
(c). Montrer que pour tout $y \in B_{x,r}$, on a $B_{x,r} = B_{y,r}$.
(d). Soient B_1 et B_2 deux boules de E. Montrer que si elles ont un point commun, alors l'une contient l'autre.

14 (∗)

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, A, B deux parties de E et enfin $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
(a). Montrer que si A est fermé, alors $\lambda A = \{\lambda x,\ x \in A\}$ est fermé.
(b). Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
(c). On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$A = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(t, 1/t),\ t \in \mathbb{R}^*\}$$

Montrer que A et B sont fermés. $A + B$ est-il fermé ?

15 (∗∗∗)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des polynômes réels de degré n et scindés à racines simples. Montrer que $\mathcal{E}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

16 (∗∗)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les seuls sous-ensembles de E à la fois fermés et ouverts sont E et l'ensemble vide.

17 (∗∗)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On note H l'ensemble des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$ dont l'image est F. Montrer que H est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

18 (∗)

On veut déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2 \qquad (*)$$

Soit f une telle fonction non nulle.

(a) Déterminer la valeur de $f(0)$.

On suppose jusqu'à nouvel ordre que $f(0) = 1$.

(b) Montrer que $f(x)$ est strictement positif quel que soit le réel x.

(c) En déduire que la fonction $g : x \longmapsto \ln f(x)$ est paire et que pour tout entier n et tout réel x, $g(nx) = n^2 g(x)$.

(d) Montrer qu'il existe un réel a tel que $\forall r \in \mathbb{Q}, g(r) = ar^2$.

(e) Conclure en déterminant toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la relation $(*)$.

Suites et fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé

19 (∗∗)

Si A et B sont deux parties d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on appelle homéomorphisme de A dans B toute bijection continue de A dans B dont la réciproque est également continue.

(a). Montrer que $x \longmapsto x/(1+|x|)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. Donner sa réciproque.

(b). Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est homéomorphe à chacune de ses boules ouvertes.

20 (∗∗)

Soit A un fermé non borné de $\mathbb{R}^n$ et f continue sur A à valeurs réelles. On suppose que $f(x) \xrightarrow[||x||\to+\infty]{} +\infty$.

(a). Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

(b). Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_k = \{x \in A,\ f(x) \leq k\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

21 (∗∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ et enfin f un élément de $\mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}(E)$.

(ii) Il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, $(f_k(e_i))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(e_i)$ dans E.

(iii) Pour tout $x \in E$, $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans E.

22 (∗∗)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \longrightarrow E$ une application continue. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E \setminus \{a\}, \qquad ||f(x) - a|| < ||x - a||$$

(a) Déterminer $f(a)$.

Soit u_0 un élément quelconque de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n.

(b) Montrer que la suite $(||u_n - a||)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

(c) On pose $K = \{x \in E,\ \ell \leq ||x-a|| \leq ||u_0 - a||\}$. Montrer que K est un fermé borné de E.

(d) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

23 (∗) **Mines PC 1998**

Soit B une matrice antisymétrique réelle. On suppose que $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note C sa limite. Que peut-on dire de C ?

Exercices supplémentaires non corrigés

24 —— $(*)$ —— **PC Mines 2021**

Soient E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes dont les boules unités ouvertes sont respectivement notées B_1 et B_2. Montrer que $N_1 = N_2$ si et seulement si $B_1 = B_2$.

25 —— $(**)$ —— **PC Centrale 2019**

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose
$$||P|| = |P(0)| + \sum_{k=1}^{n} |P(1/k)|$$

Déterminer deux constantes C_1 et C_2 optimales telles que
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad C_1 \, ||P||_{\infty,[0;1]} \leq ||P|| \leq C_2 \, ||P||_{\infty,[0;1]}$$

26 —— $(**)$ —— **PC Mines 2021**

On note
$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n\geq 0} |u_n| \ \text{converge.} \right\}$$

Caractériser les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que l'application N_α suivante soit une norme sur E :
$$N_\alpha : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \, |u_n| \end{array}$$

27 —— $(*)$ —— **PC Mines 2019**

Soient $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant respectivement vers A et B. On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A_p et B_p sont semblables. A-t-on nécessairement A et B semblables ?

28 —— $(**)$ —— **PC ENS 2023**

On pose $F : \mathcal{C}\left([0;1], \mathbb{R}\right)$ et $E = \left\{ u \in \mathcal{C}^1\left([0;1], \mathbb{R}\right), \ u(0) = u(1) = 0 \right\}$.

(a). Montrer que l'application $|| \ \ || : f \longmapsto \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t}$ est une norme sur F.

(b). Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $||u|| \leq C \, ||u'||$ pour tout $u \in E$.

(c). On fixe $f \in F$. Montrer que $J : u \longmapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 u'(t)^2 \, \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)u(t) \, \mathrm{d}t$ est minorée sur E.

(d). Montrer que J possède un minimum atteint en un unique $u_0 \in E$, que l'on déterminera en fonction de f.

29 —— $(***)$ —— **PC X 2022**

On munit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique. Peut-on trouver deux sous-ensembles A et B disjoints tels que $A \cup B = \overline{B}(0,1)$ ainsi qu'une application $f : A \longrightarrow B$ bijective qui conserve la norme ?

2 On pourra commencer par chercher une expression plus simple de N_1 et N_2.
Pour déterminer α et β optimaux, déterminer la boule unité de B_1 puis les extremums de N_2 sur cet ensemble.

3 On pourra utiliser la suite de fonction $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n : t \longmapsto [f(t)/\,||f||_\infty]^{1/(2n+1)}$

4 (a) Utiliser l'existence d'une boule centrée en 0 contenue dans C.

(b) Utiliser à nouveau l'existence de la boule pour la séparation. Utiliser la symétrie pour la propriété de positive homogénéité. Enfin, utiliser la convexité pour l'inégalité triangulaire. Dans tous les cas, utiliser la caractérisation séquentielle de la borne inférieure.

5 Dans les trois premières questions, on se focalisera surtout sur l'inégalité triangulaire, le reste étant toujours vérifié.

(b). Prendre $E = \mathbb{R}^2$ et chercher deux normes N_1 et N_2 et deux vecteurs x et y tels que $N_1(x)$ (resp. $N_2(y)$) est petit devant $N_2(x)$ (resp. $N_1(y)$).

6 Ne pas oublier de justifer que N est bien définie. Pour la séparation, noter f comme combinaison linéaire finie d'exponentielle, puis calculer ses dérivées en 0.

7 Introduire une famille libre orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ pour le produit scalaire associé à $||\cdot||_2$. Fixer $x \in [0;1]$ et considérer $g : t \longmapsto e_1(x)e_1(t) + \cdots + e_p(x)e_p(t)$ pour montrer que $p \le C^2$.

8 On a facilement $d(x, A^\circ) \ge d(x, A) \ge d(x, \overline{A})$. Justifier que l'une des inégalité est toujours une égalité, mais que l'autre ne l'est pas toujours.

9 Décrire A comme l'intersection d'images réciproques de $\mathbb{R}^*$ par des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

10 Pour la convexité de $\overline{C}$, utilisez la caractérisation séquentielle. Pour celle de C°, passez par les boules ouvertes (en d'autres termes, directement par la définition d'un ouvert).

11 Utiliser le fait qu'une suite convergente est bornée, et démontrer que toute boule contient un nombre fini d'éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

12 Distinguer les cas $p = 0$ et $p = n$ du reste.
Utiliser la caractérisation séquentielle pour montrer que certains de ces ensembles ne sont pas fermés. Utiliser en revanche le résultat admis pour montrer que l'un d'entre eux est effectivement un fermé.

15 Fixer $P \in \mathcal{E}_n$, noter $x_1 < \ldots < x_n$ ses racines, puis introduire des réels arbitraires tels que

$$y_0 < x_1 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < x_n < y_n$$

Etudier les changements de signes de $(P(y_0), \dots, P(y_n))$ et montrer que si $(Q(y_0), \dots, Q(y_n)$ présente la même alternance de signe, alors Q est sincdé à racines simples.

16 Si F est un tel sous-ensemble non vide et distinct de E, considérer $x_0 \in F$ et $y_0 \notin F$ puis étudier l'ensemble

$$\{x_0 + t(y_0 - x_0)/\,||y_0 - x_0||\,,\ t \in \mathbb{R}\}$$

17 Montrer que la propriété $p \circ p = p$ caractéristique des projecteurs passe à la limite, et le fait que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

18 (b) Raisonner par l'absurde en utilisant la valeur de $f(0)$ et la continuité de f en 0.

(d) Exprimer $f(1/q)$ en fonction de $f(1)$ pour tout entier q non nul.

(e) Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la continuité de f.

19 (a) Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $y \in\,]-1;1[$ en distinguant le cas $y > 0$ du cas $y < 0$.

(b) Modifier en l'adaptant la fonction de la question précédente.

20 (a) On pourra montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que en notant $K = A \cap B_{0,r}$, alors $\inf\limits_{x\in A} f(x) = \inf\limits_{x\in K} f(x)$.

(b) Utiliser les propriétés de f pour montrer que E_k est fermé et borné.

21 Fixer une base $\mathcal{B}$ de E et utiliser dans $\mathcal{L}(E)$ la norme $||f||_\infty = \sup_{i,j} |a_{i,j}|$ où $(a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$ est la matrice de f respectivement à $\mathcal{B}$.

22 (a) Utiliser une suite convergente de limite a.

(d) Raisonner par l'absurde et montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans K. Utiliser ensuite la continuité d'une application judicieuse sur le fermé borné K.

23 Remarquer que B^{2n} est symétrique et que B^{2n+1} est antisymétrique pour tout entier n.