

Remarques : Soit Ω un ouvert d'un espace vectoriel E , F un espace vectoriel de dimension finie, et $f : \Omega \rightarrow F$ une application. Dans le cours sur les espaces vectoriels normés, on a vu que pour l'étude des propriétés de régularité d'une fonction :

- Les notions de limites en un point et de continuité ne dépendent pas du choix de la norme utilisée sur les espaces ;
- On peut toujours se ramener à l'étude d'une fonction à valeurs réelles en introduisant les fonctions coordonnées de f dans une base arbitraire de F ;
- On peut également toujours se ramener au cas où Ω est une partie de $\mathbb{R}^p$ (où p est la dimension de E) en introduisant une base arbitraire de E .

En définitive, on peut donc systématiquement se ramener au cas où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. On se place donc dans ce cas pour toute la suite du chapitre, et on munit $\mathbb{R}^p$ d'une norme quelconque. La base canonique de $\mathbb{R}^p$ sera notée $(e_1, \dots, e_p)$.

1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 1 (Dérivée suivant un vecteur)

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_1, \dots, a_p)$ un point de Ω et $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$. On dit que f admet au point a une dérivée suivant le vecteur h lorsque l'application

$$\varphi : t \mapsto f(a + th) = f(a_1 + th_1, \dots, a_p + th_p)$$

est dérivable en 0. Dans cas, sa dérivée en 0 est appelée dérivée selon h en a et est notée $D_h f(a)$.

Remarque 1

L'hypothèse « Ω ouvert » assure l'existence d'un voisinage ouvert de 0 sur lequel φ est bien définie ce qui permet d'étudier la dérivabilité à gauche et à droite en ce point.

Définition 2

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point de Ω et $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. On dit que f admet au point a une dérivée partielle par rapport à sa i -ième variable si f admet une dérivée en a selon le vecteur e_i , c'est-à-dire lorsque

$$\varphi : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

est dérivable en 0, soit encore par translation de variable lorsque

$$\psi : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

est dérivable en a_i . Dans cas, sa dérivée en a_i est également appelée i -ième dérivée partielle de f en a et notée

$$\partial_i f(a)$$

Si cette quantité est bien définie en tout point de Ω , l'application

$$\begin{aligned} \partial_i f : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\mapsto \partial_i f(a) \end{aligned}$$

est appelée i -ième dérivée partielle de f , ou dérivée partielle de f par rapport à sa i -ième variable.

Remarque 2

En général, il est de coutume d'adapter les notations pour les dérivées partielles aux notations utilisées pour les variables. Ainsi, lorsque $p = 2$ et $p = 3$, il est d'usage de noter

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) & & & (x, y, z) &\longmapsto g(x, y, z) \end{aligned}$$

auquel cas les dérivées partielles $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_1 g$, $\partial_2 g$ et $\partial_3 g$ sont également notées

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial g}{\partial z}$$

Dans le cas général (p quelconque), si l'on note

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

alors la i -ième dérivée partielle $\partial_i f$ est également notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Exemple 1

- Toute application polynomiale admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables en tout point de $\mathbb{R}^p$.
- L'application $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ admet des dérivées partielles par rapport à x ou à y en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Elle n'admet pas de dérivée partielle en $(0, 0)$.

- L'application
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, y-compris en $(0, 0)$. Pourtant, elle n'est pas continue en $(0, 0)$.

Définition 3

Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω .

Proposition 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$. L'ensemble $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications continues de Ω dans $\mathbb{R}$. Il est de plus stable par produit. Enfin, si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ne s'annule pas, alors $1/f$ est également $\mathcal{C}^1$.

Exemple 2

- Une application polynomiale est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
- L'application
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{(xy)^k}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ si $k = 1$ mais l'est lorsque $k \geq 2$.

Théorème 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω . Alors, f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point a de Ω . Plus précisément, si l'on note $a = (a_1, \dots, a_p)$ et $x = (x_1, \dots, x_p)$, alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot (x_k - a_k) + o(\|x - a\|)$$

Corollaire 1

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω .

Exercice 1 (Centrale)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point.
- L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Définition 4

Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. Pour tout $a \in \Omega$, on appelle différentielle de f au point a l'application

$$\begin{aligned} df(a) : \quad \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, \dots, h_p) &\longmapsto \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(a) \end{aligned}$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$, on a coutume de noter plutôt $df(a) \cdot h$ la quantité $(df(a))(h)$.

Remarque 3

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$, le développement limité de f en un point a de Ω s'écrit ainsi

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + df(a) \cdot (x - a) + o(\|x - a\|)$$

ou encore

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + df(a) \cdot h + o(\|h\|)$$

Proposition 2

Si a est un point de Ω , alors pour tous f et g dans $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$d(\lambda f + g)(a) = \lambda df(a) + dg(a)$$

De plus,

$$d(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot dg(a) + g(a) \cdot df(a)$$

Enfin, si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ne s'annule pas sur Ω ,

$$d(1/f)(a) = -\frac{1}{f(a)^2} \cdot df(a)$$

Remarque 4

Plus généralement, considérons une application $f : \Omega \mapsto F$ où Ω est un ouvert d'un espace vectoriel E et F un espace vectoriel, tous deux de dimension finie. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L : E \longrightarrow F$ telle que

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

Une telle application est alors unique, appelée différentielle de f en a et notée $df(a)$. Si une telle application existe, alors f est continue en a .

2 Règle de la chaîne

Théorème 2 (Règle de la chaîne (dérivée d'une composée))

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \Omega & \text{et} & & f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)) & & & (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

deux applications de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, la composée $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \varphi)'(t) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_k(t)$$

Corollaire 2

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On considère $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et p applications $x_1, \dots, x_p$ de U dans $\mathbb{R}$, toutes de classe $\mathcal{C}^1$ et telles que $g = (x_1, \dots, x_p)$ soit à valeurs dans Ω . Alors, l'application

$$\begin{aligned} h : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)) \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et tout $(u_1, \dots, u_n) \in U$,

$$\frac{\partial h}{\partial u_k}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^p (\partial_i f)(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_k}(u_1, \dots, u_n)$$

ce qui s'écrit encore
$$\partial_k(f \circ g) = \sum_{i=1}^p [(\partial_i f) \circ g] \times (\partial_k x_i)$$

Exemple 3 (Coordonnées polaires)

Notons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

Alors, pour toute application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $h = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Remarque 5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On note

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

et $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f . La matrice jacobienne de f au point $a \in \Omega$ est la matrice définie par

$$J(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$$

Elle coïncide avec la matrice respectivement aux bases canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ de la différentielle de f au point a (au sens de la remarque 4 pour $n \geq 2$). Une conséquence (immédiate) du corollaire 2 est alors l'égalité pour toutes fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur des ouverts Ω et U avec $g(U) \subset \Omega$

$$J(f \circ g) = (J(f) \circ g) \cdot J(g)$$

En particulier, pour $n = p = 1$, on retrouve la formule classique $(f \circ g)' = g' \cdot (f' \circ g)$.

Corollaire 3

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω convexe de $\mathbb{R}^p$. Alors f est constante sur Ω si et seulement si toutes ses dérivées partielles sont nulles sur Ω .

Remarque 6

Le résultat reste valable sur n'importe quelle partie Ω de $\mathbb{R}^p$ connexe par arcs.

3 Gradient

Définition 5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On définit en tout point a de Ω le gradient de f au point a par

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_k f(a) \end{pmatrix}$$

Si l'on munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique, c'est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, \quad df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a) | h \rangle$$

Remarque 7 (Interprétation géométrique du gradient)

Si le gradient de f en a est non nul, il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.

Proposition 3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in \Omega$. Pour tous éléments $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, tous scalaire λ ,

$$\nabla(\lambda \cdot f + g)(a) = \lambda \cdot \nabla f(a) + \nabla g(a)$$

et

$$\nabla(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot \nabla f(a) + f(a) \nabla g(a)$$

Enfin, si f ne s'annule pas sur Ω , alors

$$\nabla(1/f)(a) = -\frac{1}{f(a)^2} \cdot \nabla f(a)$$

Remarque 8

Le résultat de l'exemple 3 se réécrit

$$(\nabla f)(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) \cdot \vec{u}_\theta$$

4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω , on peut s'intéresser à l'existence de dérivées partielles de ses dérivées partielles. Dans ce cas, on note lorsqu'elles existent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

Ces applications sont appelées les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f .

Définition 6

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues.

Théorème 3 (Théorème de Schwarz)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω , alors pour tous $i, j \in \llbracket 1; p \rrbracket$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Exemple 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ mais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$$

On peut effectivement vérifier que ces fonctions dérivées partielles d'ordre 2 ne sont pas continues car elles n'ont pas de limite en $(0, 0)$.

Remarque 9

On définit de la même manière les dérivées partielles de f d'ordre $k \geq 3$ et on note pour tous $i_1, \dots, i_k \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right) \right)$$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues sur Ω . Elle est dite $\mathcal{C}^\infty$ si elle est $\mathcal{C}^k$ pour tout entier k . Le théorème de Schwarz assure que l'on peut librement permuter l'ordre des dérivations pour le calcul d'une dérivée d'ordre k d'une fonction $\mathcal{C}^k$. On les note alors sous la forme

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_p^{\alpha_p}} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = k$$

L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) de Ω dans F est noté $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(\Omega, F)$).

Définition 7

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$. On appelle matrice hessienne de f au point a la matrice $H_f(a) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i, j \in \llbracket 1; p \rrbracket}$$

En vertu du théorème de Schwarz, il s'agit d'une matrice symétrique réelle.

Proposition 4 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω . Alors, f admet un développement limité à l'ordre 2 en tout point a de Ω . Plus précisément, lorsque $h \in \mathbb{R}^p$ tend vers 0,

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + h^T \cdot H_f(a) \cdot h + o(|h|^2)$$

Remarque 10 (Laplacien)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. On appelle laplacien de f l'application

$$\Delta f = \sum_{k=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

Le laplacien de f en a est donc égal à la trace de la matrice hessienne de f en a .

Exercice 2 (Calcul du Laplacien en coordonnées polaires)

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On note $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Justifier que pour tout $r \neq 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \right)(r, \theta)$$

5 Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Définition 8

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^p$ présente en a

- un maximum global (resp. minimum global) si

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a))$$

- un extremum global si elle présente en a un minimum ou un maximum global.
- un maximum local (resp. minimum local) si il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B_{a,r} \cap A, \quad f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a))$$

- un extremum local si elle présente en a un minimum ou un maximum local.

Remarque 11

- Quelques rappels sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Sur un compact, une fonction continue admet toujours un maximum et un minimum global.
- Un extremum global est nécessairement un extremum local mais la réciproque est fausse.
- Il n'existe pas de caractérisation simple des extremums d'une fonction numérique. En revanche, on a les conditions suffisantes suivantes.

Définition 9

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que $x \in \Omega$ est un point critique de f si $df(x)$ est l'application nulle, c'est-à-dire si le gradient de f en x est nul, soit encore si toutes les dérivées partielles de f en x sont nulles.

Proposition 5

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **ouvert** Ω . Tout point de Ω en lequel f présente un extremum local est un point critique de f .

Remarque 12

- La condition n'est que suffisante (considérer $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$).
- Dans la preuve, on utilise le fait que si f a un minimum local en a , il en est de même de $t \mapsto f(a + th)$ en 0. Cette propriété n'est pas suffisante pour assurer la réciproque (considérer $(x, y) \mapsto y(y - x^2)$).

Proposition 6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f .

- Si $H_f(a)$ est définie positive, alors f admet un minimum local (strict) en a .
- Si $H_f(a)$ n'est pas une matrice positive, alors f n'admet pas de minimum local en a .

Remarque 13

- Le premier cas correspond à $\text{Sp } H_f(a) \subset \mathbb{R}_+^*$, le second à $\text{Sp } H_f(a) \cap \mathbb{R}_- \neq \emptyset$. Lorsque $\text{Sp } H_f(a) \subset \mathbb{R}_+^*$, on a cette fois un maximum local strict. Lorsque $\text{Sp } H_f(a) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$, on n'a pas de maximum. Lorsque toutes les valeurs propres sont de même signes, mais que le spectre de $H_f(a)$ contient 0, alors on ne peut pas conclure.
- Pour $p = 2$, la matrice $H_f(a)$ admet deux valeurs propres réelles (pas nécessairement distinctes), que l'on note λ et μ . Dans ce cas,

$$\det H_f(a) = \lambda \cdot \mu \quad \text{et} \quad \text{Tr } H_f(a) = \lambda + \mu$$

On en déduit alors les résultats suivants :

- Si $\det H_f(a) > 0$, les deux valeurs propres sont non nulles et de même signes, qui est celui de $\text{Tr } H_f(a)$. Ainsi, si $\text{Tr } H_f(a) > 0$, on a un minimum local en a , et un maximum local en a si $\text{Tr } H_f(a) < 0$.
- Si $\det H_f(a) < 0$, les deux valeurs propres sont non nulles et de signes opposés. On n'a alors ni un maximum, ni un minimum local en a .
- Si $\det H_f(a) = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemple 5 (Travail sur un compact)

Déterminer les extremums globaux et locaux de l'application

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 6y \end{aligned}$$

sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 2 \text{ et } |y| \leq 2\}$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{C}$ un cercle et A, B et C trois points du cercle. De quelle manière doit-on placer A, B et C pour que l'aire du triangle ABC soit maximale ?

6 Complément : exemples d'équations aux dérivées partielles

Cas de base (ordre 1) :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

- Si $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, alors il existe une application a définie et $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f : (x, y) \longmapsto a(y)$.
- Si $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, alors il existe une application a définie et $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f : (x, y) \longmapsto a(x)$.

Cas de base (ordre 2) :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

- Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, alors il existe a et b définies et $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f : (x, y) \longmapsto x a(y) + b(y)$.
- Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, alors il existe a et b définies et $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f : (x, y) \longmapsto y a(x) + b(x)$.
- Enfin si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, alors il existe a et b définies et $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f : (x, y) \longmapsto a(x) + b(y)$.

Cas général

Il n'existe aucune méthode générale. Pour l'ordre 1, on cherchera systématiquement à se ramener à un système où seulement l'une des dérivées partielles intervient, à l'aide d'un changement de fonction inconnue de la forme $g = f \circ \varphi$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective. Seul les deux cas suivants étaient exigibles avant la réforme.

- Changement de variable affine :

$$\varphi : (u, v) \longmapsto (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v) \quad \text{où} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ sont quatre réels fixés}$$

- Changement de variable en coordonnées polaires :

$$\varphi : (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Exemple 6 (Equation de propagation des ondes)

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $c > 0$ tels que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Alors, il existe deux fonctions a et b de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f : (x, t) \longmapsto a(x + ct) + b(x - ct)$$