

III. UNE IDENTITÉ D'EULER

III.A Quand t tend vers n par valeurs inférieures, $f_n(t)$ tend vers 0 donc f_n est en fait continue sur $]0; +\infty[$. En outre, elle est intégrable sur $[n; +\infty[$ car nulle sur cet intervalle. Enfin, on a l'équivalent

$$f_n(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$$

donc le critère de Riemann assure l'intégrabilité de f_n sur $]0; n]$. En conclusion,

$$f_n \text{ est continue et intégrable sur }]0; +\infty[.$$

III.B Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé.

- Soit $t \in]0; +\infty[$ fixé. Alors, de l'équivalent

$$\ln \left(1 - \frac{t}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$$

$$\text{il vient} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{t}{n} \right) = -t$$

$$\text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1-t/n)} = e^{-t} \quad (\text{continuité de } y \mapsto e^y)$$

Or pour n assez grand on a $f_n(t) = e^{n \ln(1-t/n)} t^{x-1}$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = e^{-t} t^{x-1}$$

Autrement dit, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$.

- Par ailleurs, l'inégalité de concavité $\ln(1-u) \leq -u$ valide sur $] -\infty; 1[$ assure que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t < n \quad 0 \leq f_n(t) = e^{n \ln(1-t/n)} t^{x-1} \leq e^{-t} t^{x-1}$$

Comme $f_n(t)$ est nulle lorsque $t \geq n$, cette inégalité est en fait vraie pour tout $t > 0$, d'où la domination

$$\forall t \in]0; +\infty[\quad \forall n \geq 1 \quad 0 \leq f_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}$$

où la fonction de droite est indépendante de n , continue et intégrable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On peut donc échanger limite et intégrale grâce au théorème de convergence dominée pour conclure que

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x)$$

III.C Intégrons par parties sur tout segment $[\varepsilon; 1] \subset]0; 1]$. En posant

$$u : t \mapsto (1-t)^{n+1} \quad u' : t \mapsto -(n+1)(1-t)^n \quad v : t \mapsto \frac{t^x}{x} \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto t^{x-1}$$

on obtient

$$\int_{\varepsilon}^1 (1-t)^{n+1} t^{x-1} dt = \int_{\varepsilon}^1 (n+1)(1-t)^n \frac{t^x}{x} dt + \left[(1-t)^{n+1} \frac{t^x}{x} \right]_{\varepsilon}^1$$

Prenons maintenant la limite de cette identité lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Le crochet tendant vers 0 il vient

$$\boxed{J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)}$$

III.D Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall x > 0 \quad J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque

$$J_0(x) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} = \frac{0!}{x}$$

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: Le résultat de la question III.C permet de calculer

$$\begin{aligned} J_{n+1}(x) &= \frac{n+1}{x} J_n(x+1) && \text{(question III.C)} \\ &= \frac{n+1}{x} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)} && (\mathcal{P}(n) \text{ en } x+1) \\ J_{n+1}(x) &= \frac{(n+1)!}{x(x+1)\dots(x+n)(x+n+1)} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall n \geq 0 \quad \forall x > 0 \quad J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}}$$

III.E Le changement de variable affine $u = t/n$ assure que

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x J_n(x)$$

D'après la question III.B, il vient

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x J_n(x)$$

Or on a vu dans la question III.D que

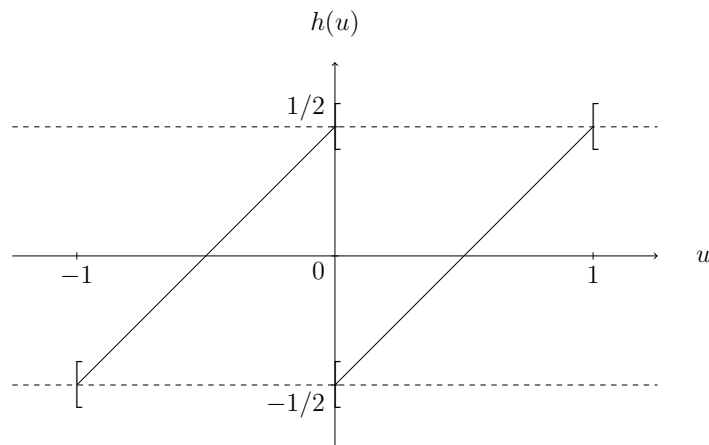
$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}$$

donc

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$$

IV. UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRE

IV.A Voici la courbe représentative de la fonction $h : u \mapsto u - [u] - 1/2$ sur $[-1, 1]$.



IV.B Puisque h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, la fonction H est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, h étant 1-périodique, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H(x+1) - H(x) &= \int_x^{x+1} h(u) \, du \\ &= \int_0^1 h(u) \, du = \int_0^1 \left(u - \frac{1}{2}\right) \, du \\ H(x+1) - H(x) &= \frac{1}{2} [u^2 - u]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

Autrement dit, H est 1-périodique. Par ailleurs, h étant continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, la fonction H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, en tout point x où h est continue on a $H'(x) = h(x)$. En conclusion,

H est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique.

IV.C La fonction h étant continue par morceaux, il résulte des théorèmes généraux que la fonction $u \mapsto h(u)/(u+x)$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$. Soit $A > 0$ et intégrons par parties sur $[0, A]$ en primitivant h et en dérivant $u \mapsto 1/(u+x)$.

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{h(u)}{u+x} \, du &= \int_0^A \frac{H(u)}{(u+x)^2} \, du + \left[\frac{H(u)}{u+x} \right]_0^A \\ &= \int_0^A \frac{H(u)}{(u+x)^2} \, du - \frac{H(A)}{A+x} \quad (\text{car } H(0) = 0) \end{aligned}$$

Or, d'après la question IV.B la fonction H est continue et périodique donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$. En conséquence, on a la comparaison

$$\forall u \in]0; +\infty[\quad \left| \frac{H(u)}{(u+x)^2} \right| \leq \frac{\|H\|_\infty}{(u+x)^2}$$

ce qui assure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(u+x)^2} \, du$ est (absolument) convergente.

Par ailleurs, H étant bornée, on a

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{H(A)}{A+x} = 0$$

Les deux termes de l'intégration par parties ci-dessus admettent donc une limite lorsque A tend vers $+\infty$. On en déduit que

L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du$ est convergente.

En outre, on a la formule

$$\forall x > 0 \quad \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du = \int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(u+x)^2} du$$

IV.D Notons tout d'abord que

$$\int_0^1 |h(u)| du = \int_0^1 \left| u - \frac{1}{2} \right| du = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} - u du}_{1/8} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 u - \frac{1}{2} du}_{1/8} = \frac{1}{4}$$

afin de minorer l'intégrale de $u \mapsto \frac{|h(u)|}{u+x}$ sur $[n; n+1]$.

On a

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{|h(u)|}{u+x} du &\geq \frac{1}{n+1+x} \int_n^{n+1} |h(u)| du \\ &= \frac{1}{n+1+x} \int_0^1 |h(u)| du \quad (h \text{ périodique}) \end{aligned}$$

donc

$$\int_n^{n+1} \frac{|h(u)|}{u+x} du \geq \frac{1}{4} \frac{1}{n+1+x}$$

En sommant cette inégalité pour n allant de 0 à p dans $\mathbb{N}$, et en remarquant que la série de terme général $1/(n+1+x)$ est divergente, la relation de Chasles donne

$$\int_0^{p+1} \left| \frac{h(u)}{u+x} \right| du = \int_0^{p+1} \left| \frac{h(u)}{u+x} \right| du \geq \frac{1}{4} \sum_{n=0}^p \frac{1}{n+1+x}$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{p+1} \left| \frac{h(u)}{u+x} \right| du = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \sum_{n=0}^p \frac{1}{n+1+x} = +\infty$$

Or, par définition, une fonction est intégrable si l'intégrale de sa valeur absolue est convergente, donc

La fonction $u \mapsto \frac{h(u)}{u+x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

IV.E L'intégration par parties de la question IV.C donne

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du = \int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(u+x)^2} du$$

Par ailleurs, la fonction $\psi : (x, u) \mapsto \frac{H(u)}{(u+x)^2}$ admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point $(x, u) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, u) = -\frac{2H(u)}{(u+x)^3}$$

- Pour tout $u \in]0; +\infty[$, la fraction rationnelle $x \mapsto \psi(x, u)$ est continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $u \mapsto \psi(x, u)$ et $u \mapsto \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, u)$ sont continues sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par les théorèmes généraux. La fonction H étant bornée, le critère de Riemann assure que ces deux fonctions sont intégrables sur $]0; +\infty[$.
- Pour tout segment $[\varepsilon; A]$ de $]0; +\infty[$, on a la domination

$$\forall (x, u) \in [\varepsilon; A] \times]0; +\infty[\quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, u) \right| \leq 2 \|H\|_{\infty} \times \frac{1}{(u+\varepsilon)^3}$$

où la fonction de droite est indépendante de x et intégrable sur $]0; +\infty[$.

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique et

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0; +\infty[.}$$

En outre, d'après la formule de Leibniz de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre,

$$\forall x > 0 \quad \varphi'(x) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(u+x)^3} du = -\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A H(u) \frac{2}{(u+x)^3} du$$

En intégrant à nouveau par parties l'intégrale ci-dessus il vient

$$\begin{aligned} \int_0^A H(u) \frac{2}{(u+x)^3} du &= \int_0^A h(u) \frac{1}{(u+x)^2} du + \left[-H(u) \frac{1}{(u+x)^2} \right]_0^A \\ &= \int_0^A \frac{h(u)}{(u+x)^2} du - \frac{H(A)}{(A+x)^2} \end{aligned}$$

En rappelant que H est bornée, on fait tendre A vers $+\infty$ pour obtenir

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du}$$

Le but de l'intégration par parties menée en IV.C était précisément de reformuler l'intégrale impropre divergente $\phi(x)$ comme l'intégrale d'une fonction intégrable; on se retrouve alors dans de bonnes conditions pour vérifier les hypothèses d'intégrabilité du théorème de dérivation sous le signe somme.

V. UNE AUTRE IDENTITÉ DUE À EULER

V.A Soit $x > 0$ et i un entier naturel. Intégrons par parties l'intégrale de droite en primitivant cette fois $u \mapsto 1/(u+x)$.

$$\begin{aligned} \int_i^{i+1} \frac{u-(i+1)}{u+x} du &= - \int_i^{i+1} \ln(u+x) du + [(u-i-1) \ln(u+x)]_i^{i+1} \\ &= - \int_{x+i}^{x+i+1} \ln t dt + \ln(i+x) \end{aligned}$$

d'où la formule
$$\boxed{\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x} du}$$

V.B Développons $F_n(x)$ en utilisant la propriété de morphisme du logarithme

$$F_n(x) = \ln(n!) + (x+1) \ln n - \ln(x+n+1) + \ln x - \sum_{i=0}^n \ln(x+i)$$

En reformulant $\ln(x+i)$ grâce à la question V.A, il vient

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \ln(n!) + (x+1) \ln n - \ln(x+n+1) + \ln x \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \left(\int_i^{i+1} \frac{u-(i+1)}{u+x} du + \int_{x+i}^{x+i+1} \ln t dt \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\forall t \in [i; i+1[\quad h(u) = u - i - \frac{1}{2}$

donc
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \int_i^{i+1} \frac{u-(i+1)}{u+x} du &= \sum_{i=0}^n \left(\int_i^{i+1} \frac{h(u)}{u+x} du - \frac{1}{2} \int_i^{i+1} \frac{1}{u+x} du \right) \\ &= \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} du - \frac{1}{2} \int_0^{n+1} \frac{1}{u+x} du \end{aligned}$$

d'où
$$\begin{aligned} F_n(x) &= \ln(n!) + (x+1) \ln n - \ln(x+n+1) + \ln x \\ &\quad - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} du + \frac{1}{2} \int_0^{n+1} \frac{1}{u+x} du - \int_x^{x+n+1} \ln t dt \end{aligned}$$

Par suite, en considérant la primitive $t \mapsto -t + t \ln t$ de $\ln$, on obtient

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \ln(n!) + (x+1) \ln n - \ln(x+n+1) + \ln x \\ &\quad - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} du + \frac{1}{2} (\ln(x+n+1) - \ln x) \\ &\quad - [-(x+n+1) + (x+n+1) \ln(x+n+1) + x - x \ln x] \\ &= \ln(n!) + (x+1) \ln n - \left(x+n+\frac{3}{2} \right) \ln(x+n+1) + n+1 \\ &\quad + \left(x+\frac{1}{2} \right) \ln x - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} du \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\boxed{F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} du}$$

V.C.1 En rappelant que $\ln(1+u) = u + O(u^2)$ au voisinage de 0 on a

$$\ln(x+n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) = \ln n + \frac{x+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En injectant ce développement dans l'expression de $G_n(x)$, il vient

$$\begin{aligned} G_n(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x &= \ln(n!) - \left(\frac{1}{2} + n\right) \ln n + n - x + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \ln \sqrt{2\pi} - x + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la formule de Stirling établie à la question II.D. Or le membre de droite admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, donc $G_n(x)$ aussi et l'on a

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi}}$$

V.C.2 D'après l'identité d'Euler (III.1) on a

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{F_n(x)}$$

donc $\ln \Gamma(x+1) = \ln \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{F_n(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$ (continuité de $\ln$)

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} du \right) \quad (\text{question V.B})$$

$$\ln \Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} du$$

la séparation des limites pouvant se justifier soit par la convergence de $G_n(x)$ établie à la question V.C.1, soit par la convergence de l'intégrale établie à la question IV.C. D'après les questions IV.C et V.C.1 on a donc

$$\boxed{\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du}$$

V.D La fonction Γ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et à valeurs strictement positives, on peut dériver la formule obtenue dans la question V.C.2 pour obtenir

$$\forall x > 0 \quad \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \left(\ln x + 1 + \frac{1}{2x} \right) - 1 - \varphi'(x)$$

D'après la question IV.E on a donc bien

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du}$$