

1 Dénombrabilité

Rappels

- Si A et B sont deux ensembles finis, alors A est en bijection avec B si et seulement si ils ont le même cardinal.
- Si A et B sont deux ensembles finis, alors $\text{card}(A \times B) = \text{card } A \cdot \text{card } B$.
- Si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis et deux à deux disjoints, alors

$$\text{card}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{card } A_i$$

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ toute application bijective de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans lui-même, et on note σ_n l'ensemble de ces bijections. On rappelle que σ_n est de cardinal $n!$. Un élément σ de σ_n est un dérangement si σ n'admet pas de point fixe. Enfin, on note d_n le nombre de dérangements de σ_n . Par convention, on pose $d_0 = 1$.

- Déterminer d_1 , d_2 et d_3 .
- Etablir pour tout entier n l'égalité
$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$$
- Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de scalaires telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$$

Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_k = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

En déduire la valeur de d_n pour tout entier n .

- Pour tout entier n , on note P_n la probabilité qu'un élément aléatoire de σ_n n'ait pas de point fixe. Déterminer la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1.1 Définitions et premiers exemples

Définition 1

Un ensemble E est dit dénombrable (resp. au plus dénombrable) s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (resp. une partie de $\mathbb{N}$), c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ (resp. $I \subset \mathbb{N}$) avec des éléments x_i distincts.

Exemple 1

- Toute partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.
- Tout ensemble fini est au plus dénombrable.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Remarque 1

Plus généralement, on dit que deux ensembles E et F sont de même cardinal s'il existe une bijection entre E et F .

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ et plus généralement tous les ensembles dénombrables sont des ensembles de même cardinal.
- les intervalles $[0; 1]$ et $[0; 1[$ ont même cardinal.

Remarque 2

On notera qu'un ensemble dénombrable est par définition infini. Un ensemble au plus dénombrable est soit fini, soit dénombrable. Certains cours de mathématiques ne font pas de distinction entre ces deux notions. Ce n'est pas le choix retenu pour le programme des CPGE.

Proposition 1 (Exemple fondamental)

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

1.2 Sous-ensembles, produit et réunion d'ensembles dénombrables**Corollaire 1**

- Si E est un ensemble au plus dénombrable, toute partie F de E est au plus dénombrable.
- Si E est un ensemble qui n'est pas dénombrable, alors tout ensemble F qui contient E n'est pas dénombrable.

Théorème 1

Si E et F sont deux ensembles au plus dénombrables, alors

- l'ensemble $E \cup F$ est au plus dénombrable.
- l'ensemble $E \times F$ est au plus dénombrable.

Proposition 2

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Remarque 3

Une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ existe, mais il n'est pas pour autant simple d'en construire une explicitement. La suite de Calkin-Wilf est un exemple remarquable de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+$. Elle est obtenue par un parcours en largeur de l'arbre du même nom construit de sorte qu'un noeud de l'arbre indexé par le rationnel p/q admet pour fils gauche un noeud indexé par $p/(p+q)$ et un fils droit indexé par $(p+q)/q$. De manière surprenante, elle est également obtenue par la relation de récurrence

$$v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{1 + 2\lfloor v_n \rfloor - v_n}$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière. Ce très joli résultat fait l'objet de la troisième partie du sujet d'option informatique de la filière MP du concours CCP 2022.

Corollaire 2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles au plus dénombrables, alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est au plus dénombrable.

Proposition 3

Si I est un ensemble au plus dénombrable, et $(E_i)_{i \in I}$ est une famille indexée par I d'ensembles au plus dénombrables, alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est un ensemble au plus dénombrable.

Exemple 2

- L'ensemble des suites finies d'entiers est un ensemble dénombrable.
- L'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs entières n'est pas dénombrable.

Proposition 4

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Remarque 4

- Tous les intervalles de la forme $] \alpha; \beta[$ avec $\alpha < \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ sont en bijection avec $\mathbb{R}$, donc de même cardinal strictement supérieur à $\mathbb{N}$ (et $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$ et tout ensemble dénombrable).

On peut démontrer que les ensembles $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Si E est un ensemble infini, alors $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal strictement supérieur à E . Ainsi, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est de cardinal strictement supérieur à celui de $\mathbb{R}$.
- Georg Cantor a émis en 1878 qu'il n'existe aucun ensemble de cardinal strictement compris entre celui de $\mathbb{Q}$ et celui de $\mathbb{R}$: c'est l'hypothèse du continu. Toutefois, on ne peut pas démontrer ce résultat dans le cadre de la théorie des ensembles (preuve due à Paul Cohen en 1961) : on peut aussi bien affirmer que nier cette hypothèse et développer dans les deux cas une théorie mathématique cohérente.
- L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$. On dit alors que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a la puissance du continu.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Montrer que l'ensemble des points en lesquels f admet un extremum local strict est au plus dénombrable.

2 Sommabilité

2.1 Familles sommables de réels positifs

Définition 2

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de réels positifs. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable s'il existe un réel M tel que

$$\forall J \text{ finie } \subset I, \quad \sum_{j \in J} x_j \leq M$$

soit en d'autres termes si l'ensemble des sommes finies d'éléments de la famille est majoré. Dans ce cas, on note $\sum_{i \in I} x_i < +\infty$ et on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i \in I} x_i = \sup \left\{ \sum_{j \in J} x_j, J \text{ finie } \subset I \right\}$$

Dans le cas contraire, on note $\sum_{i \in I} x_i = +\infty$.

Remarque 5

Une famille finie de réels positifs est sommable.

Exemple 3

- Si $q \in]0; 1[$, la famille $(q^{|p|}, p \in \mathbb{Z})$ est sommable.
- La famille $\{1/q^2, q \in \mathbb{Q} \cap [1; +\infty[\}$ n'est pas sommable.

Théorème 2 (Théorème de sommation par paquets)

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de réels positifs et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I , c'est-à-dire que

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \forall p \neq q, \quad I_p \cap I_q = \emptyset$$

Alors la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si

- Pour tout entier n , la famille $(x_i)_{i \in I_n}$ est sommable.
- La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)$ converge.

Dans ce cas,

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)$$

Remarque 6

Le programme officiel précise explicitement que pour une famille de réels positifs, « on peut découper, calculer et majorer les sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité ».

Exercice 3

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{mn(m+n+2)} \right)_{m,n \geq 1}$ est sommable et calculer sa somme.

2.2 Familles sommables de complexes**Définition 3**

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si la famille de réels positifs $(|x_i|)_{i \in I}$ l'est.

Remarque 7

Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée.

Proposition 5

Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont deux familles au plus dénombrables indexées par I , et si $|x_i| \leq y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de la famille $(y_i)_{i \in I}$ implique celle de $(x_i)_{i \in I}$.

Définition 4

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable sommable de nombres complexes. Il existe $S \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists J_\epsilon \subset I \text{ finie}, \quad \forall J \text{ finie} \subset I, \quad J_\epsilon \subset J \implies \left| \sum_{j \in J} x_j - S \right| \leq \epsilon$$

Le complexe S est alors unique, appelé la somme de la famille et noté $\sum_{i \in I} x_i$.

Proposition 6 (Propriétés des sommes)

Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ deux familles au plus dénombrable et sommables de nombres complexes

- **(Linéarité)** : Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda x_i + y_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$$

- **(Croissance)** : On suppose que pour tout entier i , x_i et y_i sont réels avec $x_i \leq y_i$. Alors,

$$\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$$

- **(Produit)** : La famille $(x_i y_j)_{(i,j) \in I^2}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I^2} x_i y_j = \left(\sum_{i \in I} x_i \right) \left(\sum_{j \in I} y_j \right)$$

Théorème 3 (Théorème de Fubini)

Soit $(x_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de complexes indexée par $\mathbb{N}^2$. On suppose que

- Pour tout entier p , la série $\sum_{q \geq 0} x_{p,q}$ est absolument convergente.
- La série $\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |x_{p,q}| \right)$ converge.

Alors, la famille $(x_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} x_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x_{p,q} \right)$$

Remarque 8

Pour une famille de réels positifs, les deux hypothèses du théorème précédent donnent une condition nécessaire et suffisante de sommabilité d'après le théorème de sommation par paquets.

Exercice 4

Montrer que pour tout $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z}$$
Exercice 5

On rappelle que la constante γ d'Euler est définie par

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln n) \quad \text{où} \quad \forall n \geq 1, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On pourra utiliser le développement en série entière suivant :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

- Justifier que
$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$$

- En déduire que
$$\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k)$$

où l'on a noté $\zeta : \alpha \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

2.3 Complément : permutation des termes dans une série semi-convergente

Exercice 6

- Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série de complexes absolument convergente et $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction bijective. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

- On souhaite montrer que le résultat précédent est faux lorsque la série n'est pas absolument convergente. On fixe $\alpha > 0$ et on pose $v_n = (-1)^{n+1}/n^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Rappeler pourquoi la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente mais pas absolument convergente.

On réordonne les termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de manière à prendre les deux premiers termes positifs, puis le premier terme négatif, puis à nouveau termes positifs puis un négatif et ainsi de suite. On note $(w_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ la suite obtenue. Ainsi,

$$w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, \dots = 1, \frac{1}{3^\alpha}, -\frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{5^\alpha}, \frac{1}{7^\alpha}, -\frac{1}{4^\alpha}, \dots$$

- Pour tout entier p , exprimer w_{3p+1} , w_{3p+2} et w_{3p+3} en fonction d'un des termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- Déterminer un réel α tel que la série $\sum_{p \geq 1} w_p$ soit divergente.

Remarque 9

Etant donné un réel x quelconque, on peut démontrer l'existence et même donner un procédé algorithmique de construction d'une bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ (qui dépend du choix de x) telle que la série $\sum_{p \geq 1} v_{\sigma(p)}$ soit convergente et de somme x . On pourra consulter à cet effet l'épreuve PSI MATHS CENTRALE 1 2009.