

1 _____ (*) _____

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x, y) = \frac{f(x^2 + y^2) - f(0)}{x^2 + y^2}$$

Montrer que F a une limite en $(0, 0)$ et la déterminer.

D'après le formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre 1 à f , on a lorsque α tend vers 0, on a

$$f(x) = f(0) + \alpha f'(0) + o(\alpha)$$

On applique cette égalité en $\alpha = x^2 + y^2$ avec $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$. Ainsi,

$$f(x^2 + y^2) = f(0) + (x^2 + y^2)f'(0) + o(x^2 + y^2) \quad \text{d'où} \quad F(x, y) = f'(0) + o(1)$$

On en déduit que

La fonction F admet $f'(0)$ pour limite au point $(0, 0)$.

2 _____ (*) _____

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f et l'existence de ses dérivées partielles d'ordre 1. Déterminer ensuite le plus grand ouvert Ω sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par quotient de fonctions polynomiales $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Seule une étude en $(0, 0)$ est donc nécessaire. Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

On en déduit aussitôt que

$$|f(x, y)| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

ce qui assure la continuité de f en $(0, 0)$. Finalement,

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Etudions maintenant l'existence de ses dérivées partielles d'ordre 1 en $(0, 0)$. Notons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & \psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t, 0) = t & & & t &\longmapsto f(0, t) = -t \end{aligned}$$

Alors, φ et ψ sont dérivables en 0, de dérivées respectives 1 et -1 , ce qui prouve que $\partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$ sont définies en $(0, 0)$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$$

Par ailleurs, f étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

La fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, un calcul direct donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

et en particulier si $x = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$$

Sachant que $(\partial f / \partial x)(0, 0) = 1$, il en découle que $\partial f / \partial x$ n'est pas continue en 0. On en déduit donc que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour conclure,

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui est le plus grand ouvert sur lequel f est $\mathcal{C}^1$.

3 _____ (*) _____

Soit $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer la dérivée des fonctions

$$\begin{aligned} a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & b : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x, x) & & & x &\longmapsto F(x, F(x, x)) \end{aligned}$$

Déterminer ensuite les dérivées partielles des fonctions

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & d : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto F(y, x) & & & (x, y) &\longmapsto F(y, F(x, x)) \end{aligned}$$

On commence par écrire a comme la composée de φ et F avec

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, x) \end{aligned}$$

On applique alors la formule de dérivation des fonctions composées. En notant φ_1 et φ_2 les fonctions coordonnées de φ ,

$$\frac{d}{dx} [F(x, x)] = \varphi'_1(x) \frac{\partial F}{\partial x}(x, x) + \varphi'_2(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, x)$$

Or, φ_1 et φ_2 sont toutes l'application $x \mapsto x$ donc leur dérivée est constante égale à 1. Ainsi,

$$\boxed{\frac{d}{dx} [F(x, x)] = \frac{\partial F}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, x)}$$

De la même manière, on voit b comme la composée de ψ et F avec

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, F(x, x)) \end{aligned}$$

On applique la même formule et cette fois,

$$\frac{d}{dx} [F(x, F(x, x))] = \frac{\partial F}{\partial x}(x, F(x, x)) + \left(\frac{d}{dx} [F(x, x)] \right) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x, F(x, x))$$

soit

$$\boxed{\frac{d}{dx} [F(x, F(x, x))] = \frac{\partial F}{\partial x}(x, F(x, x)) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, x) \right) \frac{\partial F}{\partial y}(x, F(x, x))}$$

On utilise la même technique pour les dérivées partielles des fonctions c et d , à ceci près qu'il faut fixer une variable (x ou y suivant le cas). On trouve ainsi

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(y, x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial c}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(y, x)}$$

puis

$$\boxed{\frac{\partial d}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, x) \right) \frac{\partial F}{\partial y}(y, F(x, x)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial d}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(y, F(x, x))}$$

4 _____ (**) _____

- (a). Déterminer l'ensemble Ω des complexes z pour lesquels la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolument. On note alors $S(z)$ la somme de cette série.
- (b). Soit z_0 un élément de Ω . Montrer que la série précédente converge normalement sur l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(z_0)\}$$

puis que $z \mapsto S(z)$ est continue sur Ω .

- (c). Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on note $\Phi(x, y) = S(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$

Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

- (d) Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique, c'est-à-dire que le Laplacien $\Delta \Phi$ est nul.

- (a) Si l'on note $z = a + ib$, alors $|n^{-z}| = n^{-a}$. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} n^{-z}$ converge absolument si et seulement si $a > 1$, d'où

$$\text{La série } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z} \text{ converge absolument si et seulement si } z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 1\}.$$

- (b) Notons $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(z_0)\}$. Alors, pour tout $z \in \Omega_0$, on a $|n^{-z}| \leq n^{-\operatorname{Re}(z_0)}$, et donc

$$\sup_{z \in \Omega_0} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z_0)}}$$

qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, on a bien convergence normale de la série de fonctions sur le domaine Ω . Le théorème de continuité de la somme, étendu aux fonctions définies sur $\mathbb{C}$ (preuve identique en remplaçant les valeurs absolues par des modules), assure alors que f est continu sur Ω_0 car chaque application $z \mapsto n^{-z} = e^{-z \ln n}$ l'est. Le résultat étant vrai sur Ω_0 quel que soit z_0 ,

$$\text{L'application } S \mapsto S(z) \text{ est continue sur } \Omega.$$

- (c) Fixons $(x_0, y_0) \in \Omega$. Alors, $x_0 > 1$ et on peut considérer $\eta > 0$ tel que $x_0 - \eta > 1$ et définir

$$\begin{aligned} \varphi : [-\eta; \eta] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ h &\longmapsto \Phi(x_0 + h, y_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(x_0+h+iy_0)} \end{aligned}$$

La fonction Φ admet une dérivée partielle par rapport à x en (x_0, y_0) si et seulement si cette application φ est dérivable en 0. Appliquons donc le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions. Notons pour tout $n \geq 1$

$$f_n : h \longmapsto n^{-(x_0+h+iy_0)} = e^{-(x_0+h+iy_0) \ln n}$$

L'application f_n est dérivable sur $[-\eta; \eta]$ donnée par

$$f'_n : h \longmapsto (-\ln n) \cdot e^{-(x_0+h+iy_0) \ln n}$$

Par conséquent,
$$\|f_n\|_\infty = e^{-(x_0-\eta) \ln n} = \frac{1}{n^{x_0-\eta}} \quad \text{et} \quad \|f'_n\|_\infty = (\ln n) e^{-(x_0-\eta) \ln n} = \frac{\ln n}{n^{x_0-\eta}}$$

Le critère de Riemann assure que les deux majorants ci-dessus sont les termes généraux de séries convergentes (pour la seconde, cela passe par une domination du $\ln n$ par une puissance de n suffisamment petite). Les deux séries $\sum_{n \geq 1} f_n$ et $\sum_{n \geq 1} f'_n$ sont donc normalement convergentes, ce qui prouve que φ est dérivable sur $[-\eta; \eta]$ et notamment en 0 avec

$$\varphi'(0) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{x_0+iy_0}}$$

Cela signifie que Φ admet une dérivée partielle par rapport à x en (x_0, y_0) avec

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{x_0+iy_0}}$$

On démontre de la même manière qu'au (b) que l'application $\partial \Phi / \partial x$ est continue sur Ω . Par un raisonnement similaire, on en déduit que Φ admet une dérivée partielle par rapport à y continue sur Ω avec pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = -i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{x_0+iy_0}}$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = i \left(\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

et donc

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- (d) Le caractère $\mathcal{C}^2$ de Φ se montre de la même manière que son caractère $\mathcal{C}^1$. Une seconde dérivation fait apparaître un logarithme supplémentaire, mais cela ne perturbe pas la convergence normale des séries sur le domaine Ω_0 . Ensuite, par définition

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

Or, d'après le résultat de la question (c),

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \quad \text{et de même} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + i \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}$$

Le théorème de Schwarz assure l'égalité des dérivées secondes croisées

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}$$

ce qui valide le résultat en sommant les deux expressions précédentes.

$$\Delta \Phi = 0$$

5 _____ (*) _____

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et α un réel. On définit $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, \quad \varphi(x, y) = f(xy^\alpha)$$

- (a). Déterminer une équation aux dérivées partielles simple **(E)** satisfaite par φ .
 (b). Réciproquement, toute fonction solution de l'équation **(E)** est-elle nécessairement de la même forme que φ ?

- (a) Par composition, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ avec pour tout x et tout $y > 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = y^\alpha f'(xy^\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \alpha x y^{\alpha-1} f'(xy^\alpha)$$

et donc

$$\alpha x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \textbf{(E)}$$

- (b) Réciproquement, soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et solution de **(E)**. Posons

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ (x, y) &\longmapsto (xy^\alpha, y) \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que Ψ est bijective et $\mathcal{C}^1$, de réciproque $\Psi^{-1} : (u, v) \mapsto (uv^{-\alpha}, v)$ également $\mathcal{C}^1$, ce qui prouve que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Posons maintenant $g = \varphi \circ \Psi^{-1} : (u, v) \mapsto \varphi(uv^{-\alpha}, v)$. Alors,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = -\alpha u v^{-\alpha-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(uv^{-\alpha}, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(uv^{-\alpha}, v)$$

En appliquant l'équation **(E)** au point $(uv^{-\alpha}, v)$, puis en divisant par v , on constate que la quantité ci-dessus est nulle. Ainsi, il existe f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que g soit de la forme $g : (u, v) \mapsto f(u)$, et en composant par Ψ , on retrouve bien une fonction φ de la forme $(x, y) \mapsto f(xy^\alpha)$.

Toute fonction solution de **(E)** est de la forme $(x, y) \mapsto f(xy^\alpha)$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6 _____ (*) _____

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante d'inconnue $f :]0; +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à l'aide d'un passage en coordonnées polaires,

$$(E) : \quad -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = x + y + f$$

Soit f solution de **(E)**. Considérons $g : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition de fonctions $\mathcal{C}^1$, et d'après la formule de la chaîne, pour tout (r, θ) ,

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

En appliquant l'équation **(E)** au point $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, il vient alors grâce à ce calcul

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = r \cos \theta + r \sin \theta + g(r, \theta)$$

soit
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) - g(r, \theta) = r (\cos \theta + \sin \theta)$$

Fixons maintenant $r > 0$ et considérons $\varphi_r : \theta \mapsto g(r, \theta)$. L'égalité précédente implique que φ_r est solution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, précisément

$$\varphi_r'(\theta) - \varphi_r(\theta) = r (\cos \theta + \sin \theta)$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $\theta \mapsto \lambda \exp(\theta)$, tandis qu'une solution particulière est donnée par $\theta \mapsto -r \cos \theta$. Ainsi, il existe $\lambda(r) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \theta \in]-\pi/2; \pi/2[, \quad g(r, \theta) = \lambda(r) \exp \theta - r \cos \theta$$

Notons que le caractère $\mathcal{C}^1$ de f implique celui de g , puis de $r \mapsto \lambda(r)$. Pour finir, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(y/x)$, on a

$$f(x, y) = g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lambda(\sqrt{x^2 + y^2}) \exp(\arctan(y/x)) - x$$

Réciproquement, toute fonction de cette forme avec λ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ convient.

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \mapsto \lambda(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \exp(\arctan(y/x)) - x$$

où λ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

7 _____ (**) _____ **X PC 2010**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\Delta f = 0$. On pose pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$K(r) = \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt$$

Montrer que K est constante.

Notons
$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (r, t) \mapsto f(r \cos t, r \sin t) \end{array} \quad \text{d'où} \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad K(r) = \int_0^{2\pi} g(r, t) dt$$

D'après l'expression du Laplacien en coordonnées polaires, l'hypothèse $\Delta f = 0$ se traduit par

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$$

et donc pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) dt + r \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) dt + \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) dt = 0$$

Notons alors que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) dt = \left[\frac{\partial g}{\partial t}(r, t) \right]_0^{2\pi} = 0$$

car pour tout r , l'application $t \mapsto \partial g / \partial t(r, t)$ est 2π -périodique. Appliquons maintenant le théorème de dérivation sous le signe somme pour reconnaître les dérivées de K dans les deux premières intégrales. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition et

- Pour tout réel t , l'application $r \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t)$ est continue.
- Pour tout réel r et tout $k \leq 2$, l'application $t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial r^k}(r, t)$ est continue sur $[0; 2\pi]$ donc intégrable.
- Enfin pour tout segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, et tout $(r, t) \in [a; b] \times [0; 2\pi]$,

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) \right| \leq \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right\|_{[a; b] \times [0; 2\pi]}$$

cette constante étant intégrable sur le segment $[0; 2\pi]$.

Le théorème s'applique et prouve que K est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ avec pour tout r

$$K'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) dt \quad \text{et} \quad K''(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) dt$$

Tout ce qui précède montre donc que

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad r^2 K''(r) + r K'(r) = 0 \quad \text{soit} \quad \forall r \in \mathbb{R}^*, \quad r K''(r) + K'(r) = \frac{d}{dr}(r K'(r)) = 0$$

Par suite, la fonction $r \mapsto rK'(r)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, donc nécessairement nulle sans quoi K' admettrait un équivalent de la forme α/r à gauche ou à droite en 0 et ne serait pas continue en 0. Il s'ensuit que K' est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}$ par continuité ce qui permet de conclure.

La fonction K est constante.

8 _____ (**) _____

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0,0) = 0$. On suppose que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right|$$

On note $u : x \mapsto f(x,x)$, $v : x \mapsto f(x,-x)$ et pour tout x , $w_x : y \mapsto f(x,y)$.

- (a) Déterminer les dérivées de u , v et w_x .
- (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un unique $y_x \in \mathbb{R}$ tel que $|y_x| < |x|$ et $f(x, y_x) = 0$.

- (a) La fonction u (resp. v) est la composée de $x \mapsto (x,x)$ (resp. $x \mapsto (x,-x)$) et de f . Elles sont donc $\mathcal{C}^1$ par composition et d'après la formule de la chaîne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$$

Enfin, par définition de la dérivée partielle, pour tout réel x fixé,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad w'_x(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

- (b) Par hypothèse, pour tous réels x et y ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \quad \text{d'où} \quad w'_x(y) > 0$$

Ainsi, la fonction w_x est strictement croissante donc s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$. Notons que l'hypothèse implique également

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,x) > -\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x) > \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)$$

D'après le calcul précédent, on a donc $u'(x) > 0$ et $v'(x) > 0$ pour tout x donc u et v sont strictement croissantes. Sachant que $u(0) = v(0) = f(0,0) = 0$, ces deux fonctions sont strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$. Pour $x > 0$, on a donc

$$u(x) = f(x,x) = w_x(x) > 0 \quad \text{et} \quad v(x) = f(x,-x) = w_x(-x) < 0$$

La continuité de w_x assure, via le théorème des valeurs intermédiaires, que w_x s'annule nécessairement sur $] -x; x[$. On démontre de la même manière que w_{-x} s'annule en un unique point. Finalement,

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ il existe un unique } y_x \in] -x; x[\text{ tel que } f(x, y_x) = 0.$$

9 _____ (**) _____

Soit f définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - (y-x)^2$

- (a). Etudier l'existence d'extremums locaux pour cette fonction.
- (b). Etudier l'existence d'extremums globaux à la restriction de f à la boule fermée de centre O et de rayon 2.
- (c). Quel est l'image de $\mathbb{R}^2$ par f ?

- (a) Puisque $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, les extremums locaux sont nécessairement atteints en un point critique de f . Or,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 2(y-x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 2(y-x)$$

et donc, un point $M(x,y)$ est critique si et seulement si

$$\begin{cases} 4x^3 = -2(y-x) \\ 4y^3 = 2(y-x) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ 4x^3 = 2(y-x) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = -y \\ 4x^3 = -4x \end{cases}$$

Ainsi, la fonction f admet trois points critiques donnés par $(0, 0)$, $(-1, 1)$ et $(1, -1)$. Etudions la fonction f au voisinage de ces points :

- Au voisinage de $(0, 0)$, on a

$$f(x, x) = 2x^4 \geq 0 \quad \text{et} \quad f(x, 0) = x^4 - x^2 \sim -x^2 \leq 0$$

Par conséquent, la fonction f ne présente pas d'extremum local en $(0, 0)$.

- Lorsque r et s tendent vers 0, on a

$$\begin{aligned} f(1+r, -1+s) &= (1+r)^4 + (-1+s)^4 - (s-r-2)^2 \\ &= (1+4r+6r^2+O(r^3)) + (1-4s+6s^2+O(s^3)) - (r^2+s^2+4-4s+4r-2rs) \\ &= -2+5r^2+5s^2-2rs+O(r^3)+O(s^3) \\ f(1+r, -1+s) &= -2 + (4r^2+O(r^3)) + (4s^2+O(s^3)) + (r-s)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $f(1+r, -1+s)+2$ est la somme de trois quantités positives au voisinage de $(0, 0)$, ce qui montre que f présente en $(-1, 1)$ en minimum local.

- Enfin, l'étude au voisinage de $(-1, 1)$ est identique à celle du point $(1, -1)$ compte tenu de l'égalité $f(x, y) = f(-x, -y)$ valable pour tout x, y . La fonction f présente donc également un minimum local en $(1, -1)$.

Finalement,

La fonction f admet pour minimum local -2 atteint en $(1, -1)$ et $(-1, 1)$.

- (b) Puisque $\overline{B}(0, 2)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, c'est un compact et la fonction f admet donc un maximum global et un minimum global sur ce domaine. De plus, ces derniers sont atteints en un point critique de $B(0, 2)$ ou sur le bord du domaine, c'est-à-dire le cercle de centre 0 et de rayon 2. Etudions par conséquent l'application

$$\begin{aligned} \varphi : [0; 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(2 \cos t, 2 \sin t) \end{aligned}$$

Pour tout réel t , on a

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 16 \cos^4 t + 16 \sin^4 t - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t + 8 \sin t \cos t \\ &= 16 (\cos^2 t - \sin^2 t)^2 + 32 \cos^2 \sin^2 t - 4 + 4 \sin(2t) \\ &= 16 (\cos(2t))^2 + 8 \sin^2(2t) + 4 \sin(2t) - 4 \\ &= 16 (1 - \sin^2(2t)) + 8 \sin^2(2t) + 4 \sin(2t) - 4 \\ f(t) &= 12 + 4 \sin(2t) - 8 \sin^2(2t) \end{aligned}$$

Lorsque t décrit $[0; 2\pi]$, la quantité $\sin(2t)$ décrit $[-1; 1]$ de sorte que

$$\sup_{t \in [0; 2\pi]} \varphi(t) = \sup_{x \in [-1; 1]} (12 + 4x - 8x^2)$$

Une étude rapide du polynôme du second degré montre que ce maximum vaut $25/2$. Par ailleurs, cette étude montre que le minimum vaut 0, qui est strictement supérieur à -2 , c'est-à-dire la valeur aux deux points $(1, -1)$ et $(-1, 1)$ de $\overline{B}(0, 2)$. On déduit de tout ceci que

Le maximum de φ sur $\overline{B}(0, 2)$ vaut $25/2$ et son minimum est égal à -2 .

- (c) On connaît d'après l'étude de la question (b) les valeurs extrémales de f sur $\overline{B}(0, 2)$. Il suffit donc maintenant d'étudier f sur les cercles de centre $r > 2$. Notons $\varphi_r : r \longmapsto f(r \cos t, r \sin t)$. Les mêmes calculs que précédemment donnent pour tout réel t

$$\begin{aligned} \varphi_r(t) &= r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t - r^2 \cos^2 t - r^2 \sin^2 t + 2r^2 \sin t \cos t \\ &= r^4 (\cos(2t))^2 + \frac{r^4}{2} \sin^2(2t) + r^2 \sin(2t) - r^2 \\ \varphi_r(t) &= (r^4 - r^2) + r^2 \sin(2t) - \frac{r^4}{2} \sin^2(2t) \end{aligned}$$

On est à nouveau ramené à l'étude sur $[-1; 1]$ de la fonction polynomiale du second degré :

$$P_r : x \longmapsto (r^4 - r^2) + r^2 x - \frac{r^4}{2} x^2$$

L'application P_r est dérivable avec pour tout $x \in [-1; 1]$

$$P'_r(x) = r^2 - r^4 x$$

Pour $r \geq 2$, la dérivée s'annule en $1/r^2 \in [1; 1]$, et P_r atteint son maximum en ce point, qui vaut $r^4 - 3r^2/2 + 1$. Le minimum est atteint en 1 ou -1 , et puisque

$$P_r(1) = \frac{r^4}{2} \geq P_r(-1) = \frac{r^4}{2} - 2r^2$$

on en déduit que

$$\varphi_r([0; 2\pi]) = P_r([-1; 1]) = \left[\frac{r^4}{2} - r^2; r^4 - \frac{3r^2}{2} + 1 \right]$$

L'étude de la question (b) donne l'image de $\overline{B}(0, 2)$, à savoir $[-2; 25/2]$. Pour obtenir l'image de $\mathbb{R}^2$, il suffit de lui rajouter la réunion des images de φ_r pour $r \geq 2$. En remarquant que $r^4/2 - r^2 \geq 0$ pour tout $r \geq 2$, et que $r^4 - 3r^2/2 + 1$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on peut donc conclure que

$$f(\mathbb{R}^2) = [-2; +\infty[$$

10

(**)

Etudier les extremums sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de

$$f : (x, y) \mapsto 2 \ln x + 2 \ln y - 2x - 4xy$$

Que peut-on dire des bornes supérieures et inférieures de f sur son domaine de définition ?

Puisque $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un ouvert, les extremums de f (locaux ou globaux) sont atteints en un point critique. Or, pour tous $x > 0$ et $y > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} - 2 - 4y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y} - 4x$$

et donc, un point $M(x, y)$ est critique si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{2}{x} - 4y = 2 \\ \frac{2}{y} - 4x = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \frac{2}{x} - 4y = 2 \\ y = \frac{1}{2x} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad 0 = 2$$

La courbe n'admet donc pas de point critique, et donc

$$\text{La fonction } f \text{ n'admet ni extremum local, ni extremum global.}$$

Remarquons maintenant que

$$f(x, x) = 4 \ln x - 2x - 4x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

Ce résultat montre que f n'est pas minorée donc que sa borne inférieure vaut $-\infty$. Pour trouver la borne supérieure, c'est plus compliqué. Pour tous $x > 0$ et $y > 0$,

$$f(x, y) = 2\varphi(xy) - 2x \quad \text{avec} \quad \varphi : p \mapsto 2 \ln p - 4p$$

Une étude de fonction totalement élémentaire montre que φ est majorée par $-2 \ln 2 - 2$, et que ce majorant est atteint uniquement au point $1/2$. Par suite, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$f(x, y) \leq \varphi(1/2) - 2x \leq \varphi(1/2) = -2 \ln 2 - 2$$

Pour finir, on a pour tout $x > 0$,

$$f\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{x}\right) = \varphi(1/2) - \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \varphi(1/2)$$

On en déduit donc que la valeur $\varphi(1/2)$ n'est pas atteinte mais est bien la borne supérieure de f . Finalement

$$\inf_{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2} f(x, y) = -\infty \quad \text{et} \quad \sup_{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2} f(x, y) = -2 \ln 2 - 2$$

11

(**)

Mines PC 2012

Soit ABC un triangle du plan euclidien et M un point intérieur au triangle. On note A', B', C' les projetés orthogonaux de M sur respectivement (BC) , (AC) et (AB) . Déterminer la position du point M pour que le produit des longueurs $A'M, B'M$ et $C'M$ soit maximum et la valeur de ce maximum.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que AB est le plus grand coté du triangle et qu'il est de longueur 1. Dans un repère bien choisi, les coordonnées de A , B et C sont de la forme

$$A(0,0) \quad B(1,0) \quad C(a,b) \quad \text{avec} \quad a \geq 0 \quad \text{et} \quad b > 0$$

Soit maintenant $M(x,y)$ un point à l'intérieur du triangle. Notons qu'avec les définitions de l'énoncé, $A'M$ est la distance de M à (BC) (resp. $B'M = d(M, (AC))$ et $C'M = d(M, (AB))$). Les trois droites ont pour équations (obtenues à partir de produits scalaires judicieux) :

$$(AB) : y = 0 \quad (BC) : b(x-1) - (a-1)y = 0 \quad \text{et} \quad (AC) : bx - ay = 0$$

d'où l'on déduit les formules

$$d(M, (AB)) = |y| \quad d(M, (BC)) = \frac{|b(x-1) - (a-1)y|}{\sqrt{(a-1)^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad d(M, (AC)) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Soit donc

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto y(b(x-1) - (a-1)y)(bx - ay) \end{aligned}$$

On cherche à maximiser la valeur absolue de cette fonction sur l'intérieur du triangle, c'est-à-dire le domaine

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, bx - ay \geq 0 \quad \text{et} \quad b(x-1) - (a-1)y \leq 0\}$$

Le domaine $\mathcal{D}$ est fermé et borné donc compact et φ^2 est continue donc elle est bornée sur $\mathcal{D}$ et atteint ses bornes. Son maximum est strictement positif car $|\varphi|$ n'est pas nulle, et donc atteint en un point critique de l'intérieur de $\mathcal{D}$ puisque φ s'annule au bord. Pour étudier les points critiques, il est plus commode de maximiser $\ln|\varphi|$ qui est bien définie sur l'intérieur de $\mathcal{D}$.

$$\frac{\partial(\ln|\varphi|)}{\partial x}(x,y) = \frac{b}{b(x-1) - (a-1)y} + \frac{b}{bx - ay}$$

et de plus

$$\frac{\partial(\ln|\varphi|)}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{a-1}{b(x-1) - (a-1)y} - \frac{a}{bx - ay}$$

Si (x,y) est un point critique, alors

$$b(x-1) - (a-1)y = -(bx - ay) \quad \text{puis} \quad \frac{1}{y} + \frac{a-1}{bx - ay} - \frac{a}{bx - ay} = \frac{1}{y} - \frac{1}{bx - ay} \quad \text{d'où} \quad y = bx - ay$$

On a donc le système

$$\begin{cases} 2bx - (2a-1)y = b \\ bx - (a+1)y = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad (x,y) = \left(\frac{a+1}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

Le seul point critique à l'intérieur de $\mathcal{D}$ est donc le point de coordonnées $((a+1)/3, b/3)$, c'est-à-dire le centre de gravité du triangle. C'est donc nécessairement en ce point et en lui seul que $|\varphi|$ atteint son maximum.

Le produit des distances $A'M$, $B'M$ et $C'M$ est maximal lorsque M est le centre de gravité du triangle.

12 _____ (**) _____ **Centrale PC 2013**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que
$$f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\star)$$

On suppose dans un premier temps que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer qu'il existe $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x) \cdot f(x,y)$$

(b) En déduire qu'il existe g et h dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$$

On considère maintenant

$$f : (x,y) \longmapsto (xy)^3 + |xy|^3$$

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et solution de $(\star)$.

(d) Montrer que f ne peut s'écrire sous la forme $f : (x,y) \longmapsto g(x)h(y)$ avec $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, on peut considérer

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{1}{f(x, y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Alors, u est $\mathcal{C}^1$ par quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f(x, y)} \right) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{f(x, y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \\ &= -\frac{1}{f(x, y)^2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{f(x, y)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{f(x, y)^2} \left[f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \end{aligned}$$

L'hypothèse initiale sur f assure donc que la dérivée partielle de u par rapport à y est nulle. On en déduit que u ne dépend que de x , c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) = u(x, 0)$$

En posant $a(x) = u(x, 0)$, on obtient le résultat souhaité.

Il existe une application a de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x) \cdot f(x, y)$$

(b) Fixons $y \in \mathbb{R}$ et notons $\varphi_y : x \longmapsto f(x, y)$. La fonction φ_y est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout x ,

$$\varphi_y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x) \varphi_y(x)$$

En d'autres termes, φ_y satisfait une équation différentielle linéaire du premier ordre. Par suite,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_y(x) = \varphi_y(0) \cdot \exp \left(\int_0^x a(t) dt \right)$$

et finalement

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = f(0, y) \cdot \exp \left(\int_0^x u(t, 0) dt \right)$$

Il suffit ainsi de poser

$$g : x \longmapsto \exp \left(\int_0^x u(t, 0) dt \right) \quad \text{et} \quad h : y \longmapsto f(0, y)$$

Le caractère $\mathcal{C}^2$ de f impose alors celui des fonctions g et h ainsi définies.

Il existe g, h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f : (x, y) \longmapsto g(x) \cdot h(y)$.

(c) Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}^*)^2$. Par symétrie des rôles des variables x et y dans l'expression de f et compte-tenu des « parités » de la fonction, seule une étude en $(0, 0)$ et en $(x, 0)$ pour $x > 0$ est nécessaire pour conclure.

(d) Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de g et h telles que $f : (x, y) \longmapsto g(x) \cdot h(y)$. On raisonne en plusieurs étapes :

- $f(1, 1) = g(1) \cdot h(1) = 2$ d'où $g(1) \neq 0$ et $h(1) \neq 0$;
- $f(-1, 1) = g(-1) \cdot h(1) = 0$ d'où $g(-1) = 0$ car $h(1) \neq 0$;
- $f(-1, -1) = g(-1) \cdot h(-1) = 0$ car $g(-1) = 0$. C'est absurde car $f(-1, -1) = 2$.

On peut donc conclure :

La fonction f ne peut se mettre sous la forme $f : (x, y) \longmapsto g(x) \cdot h(y)$ avec $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

13

(**)

Centrale PC 2013

Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

(a) Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : x \longmapsto (a|x)$. Déterminer le gradient de φ en tout point de $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} +\infty$. Montrer que f possède un minimum global.

(c) Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x)/\|x\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que ∇f est surjective.

(a) Notons $a = (a_1, \dots, a_n)$. Alors, $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

Par suite, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = a_i$

puis $\nabla \varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \right) = (a_1, \dots, a_n)$

En d'autres termes,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla \varphi(x) = a}$$

(b) Soit $A = f(0)$. Par hypothèse, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| \geq r \implies f(x) \geq A$$

La boule B fermée de centre 0 et de rayon r est fermée et bornée, donc la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes sur B . Soit donc $x_0 \in B$ en lequel f atteint son minimum. Par définition,

$$\forall x \in B, \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \text{et en particulier} \quad f(0) \geq f(x_0)$$

Par ailleurs, si $x \notin B$, on a $\|x\| \geq r$ par définition et donc

$$f(x) \geq A = f(0) \geq f(x_0)$$

Ainsi, la valeur en x_0 est bien un minimum global de f .

La fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

(c) Fixons $a \in \mathbb{R}^n$ arbitraire et notons $f_a : x \mapsto f(x) - (a|x|)$

Pour tout x non nul, on peut écrire $f_a(x) = \|x\| \left(\frac{f(x)}{\|x\|} - \frac{(a|x|)}{\|x\|} \right)$

La quantité $(a|x|)/\|x\|$ est majorée par $\|a\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, tandis que le terme $f(x)/\|x\|$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ par hypothèse. On en déduit donc par produit de fonctions de limites infinies que $f_a \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} +\infty$. Le résultat de la question (b) assure que f_a admet un minimum global atteint en $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Notons maintenant que f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ puisque f l'est et que $x \mapsto (a|x|)$ est polynomiale. Le point x_0 est donc nécessairement un point critique de f_a . Par linéarité du gradient et d'après le résultat du (a), on a donc

$$\nabla f_a(x_0) = 0 \quad \text{soit} \quad \nabla f(x_0) - a = 0 \quad \text{et donc} \quad \nabla f(x_0) = a$$

Le vecteur a ayant été pris arbitraire, il s'ensuit que

L'application ∇f est surjective.

14

(**)

X PC 2013

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la restriction de f à toute boule de $\mathbb{R}^n$ est lipschitzienne.

Sans perdre de généralité, on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme infinie définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_k|$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Notons B la boule fermée de centre x_0 et de rayon r . Alors, B est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ donc toute fonction continue sur ce domaine est bornée. Fixons maintenant $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$ deux points de B et considérons

$$\begin{aligned} \varphi : [0; 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(ta + (1-t)b) \end{aligned}$$

L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition avec pour tout $t \in [0; 1]$, d'après la formule de la chaîne

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \frac{\partial f}{\partial x_k}(ta + (1-t)b)$$

Notons que B est convexe, donc $ta + (1-t)b$ est un élément de B pour tout $t \in [0; 1]$. De plus, les fonctions $(\partial f / \partial x_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont continues donc bornées sur B . On a donc

$$|\varphi'(t)| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\|_{\infty, B} \leq M \cdot \|a - b\|_{\infty}$$

et donc
$$\|\varphi'\|_{\infty} \leq M \cdot \|a - b\|_{\infty} \quad \text{où l'on a posé} \quad M = \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\|_{\infty, B}$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction φ entre 0 et 1, il vient par conséquent

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| \leq M |1 - 0| \quad \text{soit} \quad |f(a) - f(b)| \leq M \cdot \|a - b\|_{\infty}$$

où le réel M ne dépend que de f et de la boule B , et pas des points a et b . Ainsi,

La restriction de f à toute boule de $\mathbb{R}^n$ est lipschitzienne.