

PRÉLIMINAIRES

Noyaux itérés

a Comme $f \in L(V)$, pour tout entier naturel k ,

- $\text{Ker } f^k$ est bien un sous-espace vectoriel de V et
- pour tout $x \in \text{Ker } f^k$, $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$

d'où

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1}}$$

b Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$. On procède alors par récurrence : pour tout entier $q \geq p$, on note $\mathcal{P}(q)$ la propriété

$$\text{Ker } f^{q+1} = \text{Ker } f^q = \text{Ker } f^p$$

- $\mathcal{P}(p)$ est vraie par hypothèse.
- $\mathcal{P}(q) \implies \mathcal{P}(q+1)$: comme $\text{Ker } f^{q+1} = \text{Ker } f^p$ d'après $\mathcal{P}(q)$, il reste à montrer que $\text{Ker } f^{q+1} = \text{Ker } f^{q+2}$. On procède par double inclusion.
 - D'après la question précédente, $\text{Ker } f^{q+1} \subset \text{Ker } f^{q+2}$.
 - Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \text{Ker } f^{q+2}$.

Par définition,
$$f^{q+2}(x) = 0$$

soit
$$f^{q+1} \circ f(x) = 0$$

ou encore
$$f(x) \in \text{Ker } f^{q+1} = \text{Ker } f^q \quad (\text{d'après } \mathcal{P}(q))$$

Par suite,
$$f^q \circ f(x) = 0$$

ie
$$x \in \text{Ker } f^{q+1}$$

d'où
$$\text{Ker } f^{q+2} \subset \text{Ker } f^{q+1}$$

Finalement, on obtient l'égalité $\text{Ker } f^{q+2} = \text{Ker } f^{q+1} = \text{Ker } f^p$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\mathcal{P}(q)$ est vraie pour tout $q \geq p$.

$$\boxed{(\exists p \in \mathbb{N} \quad \text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}) \implies (\forall q \in \mathbb{N}, q \geq p \quad \text{Ker } f^q = \text{Ker } f^p)}$$

Supposons que V soit de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, la suite $(\dim \text{Ker } f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie, réelle et croissante. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inclusion $\text{Ker } f^k \subset V$ entraîne l'inégalité $\dim \text{Ker } f^k \leq n$: cette suite est majorée. Elle converge donc. En outre, étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est même constante à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$.

Montrons que ce rang p vérifie $p \leq n$. C'est bien le cas si $p = 0$. Supposons donc p non nul. D'après ce qui précède, p est le premier rang pour lequel on a l'égalité $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$, ce qui implique

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \leq p-1 \quad \text{Ker } f^k \subsetneq \text{Ker } f^{k+1}$$

d'où
$$\forall k \in \mathbb{N}, k \leq p-1 \quad \dim \text{Ker } f^{k+1} \geq \dim \text{Ker } f^k + 1$$

En sommant ces p relations, on obtient

$$\sum_{k=1}^p \dim \operatorname{Ker} f^k \geq \sum_{k=0}^{p-1} \dim \operatorname{Ker} f^k + p$$

soit, après simplification, $\dim \operatorname{Ker} f^p \geq \dim \operatorname{Ker} f^0 + p$

mais comme $f^0 = \operatorname{id}_V$ est injective, $\dim \operatorname{Ker} f^0 = 0$ et l'on obtient en définitive l'inégalité voulue :

$$\boxed{p \leq \dim \operatorname{Ker} f^p \leq n}$$

Ce rang p de convergence de la suite $(\dim \operatorname{Ker} f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi celui de la suite $(\operatorname{Ker} f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de V puisque, comme $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad (\dim \operatorname{Ker} f^k = \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}) \iff (\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1})$$

Ainsi, pour tout entier $k \geq p$ et en particulier pour $k = n$, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

c Comme u^q est nul, pour tout entier naturel $k \geq q$, l'endomorphisme $u^k = u^q \circ u^{k-q}$ l'est également. Par suite,

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq q \quad \dim \operatorname{Ker} u^k = \dim \operatorname{Ker} u^q = \dim \operatorname{Ker} 0_{L(V)} = n$$

La suite $(\dim \operatorname{Ker} u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante de valeur n à partir du rang q . D'après la question précédente, le rang de convergence de cette suite est inférieur à n ; d'où l'égalité $\dim \operatorname{Ker} u^n = n$. Par suite, $\operatorname{Ker} u^n = V$, c'est-à-dire que $u^n = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{(\exists q \in \mathbb{N}^* \quad u^q = 0) \implies u^n = 0}$$

PREMIÈRE PARTIE

I-1 Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g

I-1.a

- En composant la relation $g^2 = \lambda \text{id}_{E_n} + D_n$ à gauche par $g \in L(E_n)$, on obtient $g^3 = g \circ (\lambda \text{id}_{E_n} + D_n) = \lambda g + g \circ D_n$. En composant maintenant cette même relation à droite, il vient $g^3 = (\lambda \text{id}_{E_n} + D_n) \circ g = \lambda g + D_n \circ g$. On déduit des deux égalités ainsi obtenues que

$$\boxed{g \circ D_n = D_n \circ g}$$

- Montrons que $g(E_p) \subset E_p$.

Comme $E_p = \text{Ker } D_n^{p+1}$, il s'agit de montrer que pour tout polynôme P vérifiant $D_n^{p+1}(P) = 0$ on a nécessairement $D_n^{p+1}(g(P)) = 0$. Ceci provient du fait que g et D_n (et, par conséquent, toutes les puissances entières de D_n) commutent. En effet,

$$D_n^{p+1}(g(P)) = D_n^{p+1} \circ g(P) = g \circ D_n^{p+1}(P) = g(D_n^{p+1}(P)) = g(0) = 0$$

$$\boxed{g(E_p) \subset E_p}$$

- Soit g_p la restriction de g à E_p . Montrons $g_p^2 = \lambda \text{id}_{E_p} + D_p$.

Par hypothèse, pour tout élément x de E_n ,

$$g^2(x) = \lambda \text{id}_{E_n}(x) + D_n(x)$$

Or l'inégalité $p \leq n$ implique l'inclusion $E_p \subset E_n$, et comme

$$\forall x \in E_p \quad \begin{cases} g_p(x) = g(x) \\ \text{id}_{E_n}(x) = x = \text{id}_{E_p}(x) \\ D_n(x) = D_p(x) \end{cases}$$

on obtient finalement

$$\boxed{g_p^2 = \lambda \text{id}_{E_p} + D_p}$$

I-1.b Les démonstrations sont analogues à celles de la question précédente en remarquant que $E_n = \text{Ker } D^{n+1}$ pour tout entier naturel n et en utilisant la relation $g^2 = \lambda \text{id}_E + D$ au lieu de $g^2 = \lambda \text{id}_{E_n} + D_n$.

En pareil cas, le correcteur de votre copie s'attend à ce que vous ne refassiez pas tous les calculs...

I-1.c

- (i) Soit $B = (e_0, \dots, e_n)$ une base de F . Cette base comporte au moins un élément car $\dim F = n + 1 \geq 1$. Notons $q' = \max\{d^0(P) \mid P \in B\}$. On a ainsi $B \subset E_{q'}$, d'où $F = \text{Vect } B \subset E_{q'} = \text{Ker } D^{q'+1}$. F étant stable par D , il l'est par $D^{q'+1}$ et $(D_F)^{q'+1} = \left(D^{q'+1}\right)_{|F} = 0$. En résumé, il existe un entier naturel non nul $q = q' + 1$ tel que $D_F^q = 0$. Ceci signifie que

$$\boxed{D_F \text{ est nilpotent.}}$$

Montrons que $F = E_n$. D_F étant nilpotent, $D_F^n = 0$ et par suite

$$F \subset \text{Ker } D_F^n \subset \text{Ker } D^n = E_n$$

D'autre part, F et E_n ont même dimension $n + 1$. Ils sont donc égaux :

$$\boxed{F = E_n}$$

Déterminons les sous-espaces vectoriels de E stables par D .

- **Cas de la dimension finie** : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique sous-espace vectoriel G de E de dimension n stable par D est E_{n-1} . Ceci s'étend au cas trivial où $n = 0$ car l'unique sous-espace vectoriel de dimension nulle $\{0_E\}$ est bien stable par dérivation.

| Attention à ne pas oublier le cas où G est de dimension nulle.

- **Cas de la dimension infinie** : l'unique sous-espace vectoriel G de E de dimension infinie stable par D est l'espace E tout entier. Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire, c'est-à-dire que $G \neq E$. Il existe un polynôme $P \in E$ de degré $d \in \mathbb{N}$ n'appartenant pas à G . Comme G est de dimension infinie, il ne peut pas être inclus dans E_d qui, lui, est de dimension finie $d + 1$. G comporte donc un polynôme Q de degré r tel que $r \geq d$. Mais alors $P \in E_p \subset E_r = \text{Vect} \{D^i(Q) \mid i \in \mathbb{N}\} \subset G$ puisque G est stable par D ... On aboutit à une contradiction.

(ii) Soit G un sous-espace vectoriel de E . Montrons

$$g(G) \subset G \iff D(G) \subset G$$

- $\implies$: pour tout polynôme P de G , $D(P) = g^2(P) - \lambda P$ est bien dans G en tant que combinaison linéaire d'éléments de G .
- $\impliedby$: d'après les résultats de la question (i), trois cas se présentent.
 - $\dim G = 0$ et $G = \{0_E\}$ est bien stable par $g \in L(E)$.
 - $\dim G = n \in \mathbb{N}^*$ et $G = E_n$ est stable par g d'après la question I-1.b.
 - $\dim G = +\infty$ et $G = E$, également stable par g .

En conclusion,

$$\boxed{g(G) \subset G \iff D(G) \subset G}$$

I-2 Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$

I-2.a Supposons qu'il existe un endomorphisme g de E_0 tel que $g^2 = \lambda \text{id}_{E_0} + D_0$.

- D'une part, le polynôme dérivé d'un polynôme constant ne peut être que nul ; d'où $D_0 = 0_{L(E_0)}$.
- D'autre part, comme $\dim E_0 = 1$, $\dim L(E_0) = (\dim E_0)^2 = 1$ et il existe une constante γ telle que $g = \gamma \text{id}_{E_0}$.

En reportant ces deux résultats dans la relation $g^2 = \lambda \text{id}_{E_0} + D_0$, on obtient

$$(\gamma^2 - \lambda)1_{E_0} = 0_{E_0}$$

d'où la condition nécessaire

$$\boxed{\lambda = \gamma^2 \geq 0}$$

I-2.b Soit $\lambda < 0$. Par l'absurde, supposons qu'il existe un endomorphisme g de E (respectivement de E_n) tel que $g^2 = \lambda \text{id}_E + D$ (resp. $g^2 = \lambda \text{id}_{E_n} + D_n$). D'après le résultat obtenu à la question I-1.b (resp. I-1.a), l'endomorphisme g_0 induit par g sur E_0 vérifie la relation $g^2 = \lambda \text{id}_{E_0} + D_0$, ce qui est impossible d'après la question I-2.a.

En conclusion : si $\lambda < 0$,

- il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant la relation $g^2 = \lambda \text{id}_E + D$;
- de même, il n'existe aucun endomorphisme g de E_n tel que $g^2 = \lambda \text{id}_{E_n} + D_n$.

I-3 Une représentation matricielle simple de D_n

I-3.a Montrons qu'il existe un vecteur $y \in V$ tel que $B = (f^n(y), f^{n-1}(y), \dots, y)$ soit libre. Comme $f^n \neq 0$ par hypothèse, il existe un vecteur $y \in V$ tel que $f^n(y) \neq 0$. Montrons que ce vecteur convient, c'est-à-dire que B est libre.

Supposons qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k f^k(y) = 0 \quad (1)$$

et montrons que tous les λ_k sont nuls. On procède par récurrence sur k . Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on note $\mathcal{P}(k)$ la propriété

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 0; k \rrbracket \quad \lambda_j = 0$$

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie : en prenant l'image de (1) par l'endomorphisme f^n et en remarquant que pour tout $m \geq n+1$, $f^m = f^{n+1} \circ f^{m-n-1} = 0$, on obtient $\lambda_0 f^n(y) = 0$. Comme $f^n(y) \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $\lambda_0 = 0$.
- Si $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n-1$, $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$: en prenant l'image de (1) par f^{n-1-k} , on en déduit comme précédemment

$$\lambda_0 f^{n-1-k}(y) + \lambda_1 f^{n-k}(y) + \dots + \lambda_{k+1} f^n(y) = 0$$

Or, d'après $\mathcal{P}(k)$, les λ_j sont nuls pour $j \leq k$.

Il ne reste donc que $\lambda_{k+1} f^n(y) = 0$ ce qui implique la nullité de λ_{k+1} .

$\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.

Il existe $y \in V$ tel que $B = (f^n(y), f^{n-1}(y), \dots, y)$ soit libre.

La famille B est libre et comporte $n+1 = \dim V$ éléments ; c'est une base de V dans laquelle la matrice de f s'écrit :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = A_0$$

I-3.b Le résultat obtenu à la question précédente s'applique à $V = E_n$ (de dimension $n + 1$) et $f = D_n$ ($(D_n)^n \neq 0$, $(D_n)^{n+1} = 0$). On pose alors $B_n = B$ et l'on obtient bien

$$\boxed{\text{Mat}_{B_n}(D_n) = A_0} \quad (2)$$

Enfin,

$$\boxed{\text{Mat}_{B_n}(\lambda \text{id}_{E_n} + D_n) = \lambda I_{n+1} + A_0 = A_\lambda}$$

I-4 Un exemple

I-4.a On procède par analyse et synthèse et l'on utilise la base B_2 construite à la question I-3.b.

- **Analyse** : Soit h un endomorphisme de E_2 commutant avec D_2 . En notant $\text{Mat}_{B_2}(h) = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ et en utilisant le résultat (2) de la question I-3.b, on peut exprimer la relation $h \circ D_2 = D_2 \circ h$ sous forme matricielle :

$$\text{Mat}_{B_2}(h) A_0 = A_0 \text{Mat}_{B_2}(h)$$

soit encore
$$\begin{pmatrix} 0 & h_{1,1} & h_{1,2} \\ 0 & h_{2,1} & h_{2,2} \\ 0 & h_{3,1} & h_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $h_{3,1} = h_{2,1} = h_{3,2} = 0$, $h_{1,1} = h_{2,2} = h_{3,3}$ et $h_{1,2} = h_{2,3}$

On obtient la forme générale de la matrice $\text{Mat}_{B_2}(h)$ (on pose $a = h_{1,1}$, $b = h_{1,2}$ et $c = h_{1,3}$) :

$$\text{Mat}_{B_2}(h) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a I_3 + b \text{Mat}_{B_2}(D_2) + c \text{Mat}_{B_2}(D_2^2)$$

puisque
$$\text{Mat}_{B_2}(D_2^2) = \underbrace{(\text{Mat}_{B_2}(D_2))^2}_{=A_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tout endomorphisme h de E_2 commutant avec D vérifie donc nécessairement une relation du type

$$\boxed{h = a \text{id}_{E_2} + b D_2 + c (D_2)^2 \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3} \quad (3)$$

- **Synthèse** : tous les endomorphismes h de E_2 vérifiant une relation du type (3) commutent bien avec D_2 .
- **Conclusion** : un endomorphisme h de E_2 commute avec D_2 si, et seulement si, il existe trois réels a , b et c tels que h puisse s'écrire $h = a \text{id}_{E_2} + b D_2 + c (D_2)^2$.

I-4.b Soit $g \in L(E_2)$. Montrons que g vérifie la relation

$$g^2 = \lambda \operatorname{id}_{E_2} + D_2 \quad (4)$$

si, et seulement si, il existe trois réels a , b et c solutions du système

$$(S) \quad \begin{cases} a^2 = \lambda \\ 2ab = 1 \\ 2ac + b^2 = 0 \end{cases}$$

tels que g puisse s'écrire

$$g = a \operatorname{id}_{E_2} + b D_2 + c (D_2)^2 \quad (5)$$

- $\implies$: d'après la question I-1.a, on sait que g doit commuter avec D_2 . On déduit ensuite de la question I-4.a l'existence d'un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que g puisse s'écrire

$$g = a \operatorname{id}_{E_2} + b D_2 + c (D_2)^2$$

Comme, de plus, $(D_2)^n = 0$ dès que $n \geq 3$, l'expression de g^2 se développe :

$$g^2 = a^2 \operatorname{id}_{E_2} + 2ab D_2 + (2ac + b^2) (D_2)^2$$

On en déduit (S) par identification avec l'expression (4) (en revenant à l'écriture matricielle).

- $\impliedby$: En élevant l'expression $g = a \operatorname{id}_{E_2} + b D_2 + c (D_2)^2$ au carré, en la développant puis en la simplifiant grâce à (S), on retrouve bien la relation (4).

En conclusion, deux cas se présentent :

- Si $\lambda \leq 0$, le système (S) n'admet pas de solutions réelles et il n'existe pas d'endomorphisme g de E_2 vérifiant (4).
- Si $\lambda > 0$, le système (S) admet deux solutions distinctes

$$a = \pm\sqrt{\lambda}, \quad b = \frac{1}{2a}, \quad c = -\frac{b^2}{2a} = -\frac{1}{8a^3}$$

et il n'existe que deux endomorphismes g distincts vérifiant la relation (4). Ceux-ci sont définis par la relation (5).

Afin de résoudre l'équation $G^2 = A_1$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on interprète G et $A_1 = I_3 + A_0$ comme les matrices respectivement associées aux endomorphismes g et $\operatorname{id}_{E_2} + D_2$ de E_2 . D'après le résultat précédent (ici $\lambda = 1 > 0$),

Il existe exactement deux matrices $G \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui sont solutions de l'équation $G^2 = A_1$.

Il s'agit de

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEUXIÈME PARTIE

II-1 Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$

II-1.a Soit $g \in L(E_2)$ vérifiant $g^2 = D_n$. Alors $(g^2)^{n+1} = (D_n)^{n+1} = 0$ et il existe $q = 2n + 2 \in \mathbb{N}^*$ tel que g^q soit nul. D'après les questions préliminaires,

g est nilpotent

 (question c)

et

Ker $g \subset$ Ker g^2 (question a)

Montrons que $\dim \text{Ker } g^2 \geq 2$.

- D'une part, Ker $g \neq \{0\}$. Sinon, g serait un isomorphisme de E_n puisque ce dernier est de dimension finie. Il en serait donc de même de $g^2 = D_n$, ce qui est absurde (la dérivation n'est pas injective, puisque la primitive d'un polynôme est définie à une constante près). Ainsi, $\dim \text{Ker } g \geq 1$.
- D'autre part, Ker $g \neq$ Ker g^2 . Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Dans ce cas, d'après la question c des préliminaires,

$$\text{Ker } g = \text{Ker } g^2 = \dots = \text{Ker } (g^2)^{n+1}$$

et comme $\text{Ker } (g^2)^{n+1} = \text{Ker } (D_n)^{n+1} = \text{Ker } 0 = E_n$

on obtient $g^2 = 0$, ce qui est impossible car $D_n = g^2 \neq 0$. Par suite,

$$\dim \text{Ker } g + 1 \leq \dim \text{Ker } g^2$$

On déduit des deux points précédents que

$\dim \text{Ker } g^2 \geq \dim \text{Ker } g + 1 \geq 2$

II-1.b En raisonnant par l'absurde, supposons l'existence d'un endomorphisme g de E_n vérifiant la relation $g^2 = D_n$.

- En utilisant le résultat établi à la question précédente, il vient

$$\dim \text{Ker } D_n = \dim \text{Ker } g^2 \geq 2$$

- D'un autre côté, considérons la base canonique $(X^0, \dots, X^n)$ de E_n . Alors

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad X^{k-1} = \frac{1}{k} D_n(X^k) \in \text{Im } D_n$$

d'où $\text{rg } D_n = \dim \text{Im } D_n \geq n - 1$

et d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } D_n \leq 1$.

On aboutit à une contradiction.

Conclusion :

$\nexists g \in L(E_n) \quad g^2 = D_n$

II-1.c En raisonnant par l'absurde, supposons l'existence d'un endomorphisme g de E tel que $g^2 = D$. D'après la question I-1.b, $g(E_n) \subset E_n$ et l'endomorphisme g_n induit par g sur E_n vérifie $g_n^2 = D_n$. Ceci est impossible au vu du résultat établi à la question précédente.

Conclusion :

$\nexists g \in L(E) \quad g^2 = D_n$

II-2 Existence d'un endomorphisme g tel que $g^k = D^m$

II-2.a Procédons en trois temps.

- Commençons par remarquer que **l'opérateur D** de dérivation dans E est **surjectif** : tout polynôme $P = \sum_{j=0}^d a_j X^j$ (où $d \in \mathbb{N}$, $(a_j)_j \in \mathbb{R}^{d+1}$ et $a_d \neq 0$) est l'image par D du polynôme $\sum_{j=0}^d \frac{a_j}{j+1} X^{j+1} \in E$.

D est surjectif.

- De même, **l'application D^m** est **surjective** comme composée d'un nombre fini d'applications surjectives, ce que l'on peut montrer par une récurrence simple.

$g^k = D^m$ est surjectif.

- Il nous reste à montrer que **g est surjectif**. Nous venons de voir que $g^k = D^m$ l'était : tout polynôme P de E admet un antécédent $Q \in E$ par g^k , ce que l'on peut écrire :

$$\forall P \in E, \exists Q \in E \quad P = g^k(Q)$$

soit encore, sachant que $k \geq 2$,

$$\forall P \in E, \exists Q \in E \quad P = g(g^{k-1}(Q))$$

c'est-à-dire que $g^{k-1}(Q) \in E$ est un antécédent de P pour g .

g est surjectif.

II-2.b En utilisant la relation $g^k = D^m$ et le résultat de la question b des préliminaires, on obtient

$$\forall q \in \mathbb{N}, q \leq k \quad \text{Ker } g^q \subset \text{Ker } g^k = \text{Ker } D^m = E_{m-1}$$

d'où

$$\forall q \in \mathbb{N}, q \leq k \implies \dim \text{Ker } g^q \leq m < +\infty$$

II-2.c Montrons que Φ est une application linéaire de $\text{Ker } g^p$ dans $\text{Ker } g^{p-1}$.

- Φ est bien définie et linéaire sur $\text{Ker } g^p$ car g l'est aussi.
- Il reste à montrer que Φ est à valeurs dans $\text{Ker } g^{p-1}$. Soit $P \in \text{Ker } g^p$. Alors $g^{p-1}(\Phi(P)) = g^{p-1}(g(P)) = g^p(P) = 0$.

L'application Φ est linéaire de $\text{Ker } g^p$ dans $\text{Ker } g^{p-1}$.

Montrons que $\text{Ker } \Phi = \text{Ker } g$. On procède par double inclusion.

- « $\subset$ » : soit $P \in \text{Ker } \Phi$. Alors $0 = \Phi(P) = g(P)$, c'est-à-dire que P appartient à $\text{Ker } g$.
- « $\supset$ » : soit $P \in \text{Ker } g$. D'après la question a des préliminaires, $P \in \text{Ker } g^p$ donc $\Phi(P)$ est bien définie ; en outre, $\Phi(P) = g(P) = 0$.

Conclusion :

$\text{Ker } \Phi = \text{Ker } g$

Montrons que Φ est surjective. Soit $P \in \text{Ker } g^{p-1}$. Il s'agit de montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \text{Ker } g^p$ vérifiant $P = \Phi(Q)$. Comme g est surjectif (ce que l'on a établi à la question II-2.a), on sait déjà qu'il existe un polynôme réel Q dont l'image par g est P . Pour en faire un antécédent de P par Φ , il suffit de montrer que $Q \in \text{Ker } g^p$. C'est chose faite en écrivant $g^p(Q) = g^{p-1}(g(Q)) = g^{p-1}(P) = 0$.

En conclusion,

 Φ est surjective.

Établissons une relation entre les dimensions des sous-espaces $\text{Ker } g^{p-1}$ et $\text{Ker } g^p$.

On commence par remarquer que ceux-ci sont de dimension finie, comme on l'a démontré à la question II-2.b. Puis on applique le théorème du rang à Φ :

$$\dim \text{Im } \Phi + \dim \text{Ker } \Phi = \dim \text{Ker } g^p$$

Or, nous avons montré que Φ était surjective et que son noyau coïncidait avec celui de l'endomorphisme g , d'où

$\dim \text{Ker } g^{p-1} + \dim \text{Ker } g = \dim \text{Ker } g^p$

Cette formule est valable en remplaçant p par q pour $2 \leq q \leq p$. Par sommation des $p-1$ relations ainsi obtenues, il vient

$$\sum_{q=2}^p \dim \text{Ker } g^{q-1} + (p-1) \dim \text{Ker } g = \sum_{q=2}^p \dim \text{Ker } g^q$$

d'où l'on déduit

$\dim \text{Ker } g^p = p \dim \text{Ker } g$
(6)

II-2.d Montrons qu'il existe $g \in \text{L}(E)$ vérifiant $g^k = D^m$ si et seulement si k divise m .

- $\implies$: écrivons la relation (6) dans le cas où $p = k$. Il vient

$$\dim \text{Ker } g^k = k \dim \text{Ker } g$$

Or,

$$\text{Ker } g^k = \text{Ker } D^m = E_{m-1}$$

d'où

$$m = k \dim \text{Ker } g$$

Il reste à montrer que $\dim \text{Ker } g \neq 0$. Ceci provient du fait que $m > 0$.

En résumé, k divise m .

- $\impliedby$: dire que k divise m signifie qu'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = kr$. L'endomorphisme $g = D^r$ de E vérifie bien $g^k = (D^r)^k = D^{rk} = D^m$.

En conclusion,

$(\exists g \in \text{L}(E) \quad g^k = D^m) \iff k \mid m$

La question II-1.c correspond au cas particulier où $k = 2$ ne divise pas $m = 1$, d'où le résultat.

TROISIÈME PARTIE

III-1 Dérivée de l'application $t \mapsto (\mathbf{L}_n(t))^k$

III-1.a Soit $t \in \mathbb{R}$. La matrice $\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n$ est inversible d'inverse

$$(\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k \mathbf{D}_n^k$$

comme on peut le vérifier par le calcul :

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n) \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k \mathbf{D}_n^k \right) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k \mathbf{D}_n^k + \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k+1} \mathbf{D}_n^{k+1} \\ &= \underbrace{(\mathbf{D}_n)^0}_{=\mathbf{I}_{n+1}} + (-1)^n t^{n+1} \underbrace{(\mathbf{D}_n)^{n+1}}_{=0_{n+1}} \\ (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n) \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k \mathbf{D}_n^k \right) &= \mathbf{I}_{n+1} \end{aligned}$$

d'où

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n \quad a_k : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (-1)^k t^k \end{cases}$$

III-1.b L'application $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \mapsto (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} \end{cases}$ est continûment dérivable en tant que polynôme en t . Afin d'obtenir l'expression de sa dérivée, on dérive la relation

$$(\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n) (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} = \mathbf{I}_{n+1}$$

par rapport à $t \in \mathbb{R}$. Il vient que pour tout réel t ,

$$\underbrace{\frac{d(\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)}{dt}}_{=\mathbf{D}_n} (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} + (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n) \frac{d(\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1}}{dt} = 0_{n+1}$$

$$ie \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{d(\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1}}{dt} = -(\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} \mathbf{D}_n (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1}$$

Or, d'après la question précédente, nous savons que $(\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1}$ est un polynôme en $\mathbf{D}_n$ et que donc il commute avec $\mathbf{D}_n$.

Conclusion :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{d(\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1}}{dt} = -\mathbf{D}_n (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-2}$$

III-1.c Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $(L_n(t))^{n+1} = 0$. On remarque que

$$L_n(t) = D_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} D_n^k \right)$$

ce qui permet d'exprimer $(L_n(t))^{n+1}$ sous la forme (les deux termes du produit commutent) :

$$(L_n(t))^{n+1} = (D_n)^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} D_n^k \right)^{n+1}$$

et comme $(D_n)^{n+1} = 0$, la nullité de $(L_n(t))^{n+1}$ ne fait pas de doute.

En conclusion,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (L_n(t))^{n+1} = 0$$

III-1.d L'application L_n est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme en t . Par linéarité de l'opérateur de dérivation, on obtient

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{dL_n(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} D_n^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k D_n^k \right) D_n \\ &= \left((I_{n+1} + t D_n)^{-1} - (-1)^n t^n D_n^n \right) D_n \\ &= (I_{n+1} + t D_n)^{-1} D_n - (-1)^n t^n \underbrace{D_n^{n+1}}_{=0_{n+1}} \\ \frac{dL_n(t)}{dt} &= (I_{n+1} + t D_n)^{-1} D_n \end{aligned}$$

d'où

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{dL_n(t)}{dt} = (I_{n+1} + t D_n)^{-1} D_n$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k = 0$, $(L_n(t))^0 = I_{n+1}$ et $\frac{d(L_n(t))^k}{dt} = 0_{n+1}$.
- Sinon,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{d(L_n(t))^k}{dt} = k (L_n(t))^{k-1} \frac{dL_n(t)}{dt}$$

d'où, d'après l'expression de $\frac{dL_n(t)}{dt}$ précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{d(L_n(t))^k}{dt} = k (L_n(t))^{k-1} (I_{n+1} + t D_n)^{-1} D_n$$

Conclusion :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{d(L_n(t))^k}{dt} = k (L_n(t))^{k-1} (I_{n+1} + t D_n)^{-1} D_n$$

III-2 Matrice $\varphi_u(t)$

III-2.a Soient u, v et t trois réels fixés. En utilisant la formule du binôme de Newton dans la relation définissant φ_{u+v} , on a :

$$\begin{aligned}\varphi_{u+v}(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{(u+v)^k}{k!} (\mathbf{L}_n(t))^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} u^l v^{k-l}}{k!} (\mathbf{L}_n(t))^k \\ \varphi_{u+v}(t) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \frac{u^l}{l!} \frac{v^{k-l}}{(k-l)!} (\mathbf{L}_n(t))^k\end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{L}_n(t))^k = 0$ dès que k est supérieur ou égal à $n+1$, on peut ajouter des termes de ce type pour obtenir l'expression

$$\varphi_{u+v}(t) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{l=0}^k \frac{u^l}{l!} \frac{v^{k-l}}{(k-l)!} \right) (\mathbf{L}_n(t))^k$$

que l'on reconnaît comme étant la forme développée de

$$\begin{aligned}\varphi_{u+v}(t) &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} (\mathbf{L}_n(t))^k \right) \left(\sum_{l=0}^n \frac{v^l}{l!} (\mathbf{L}_n(t))^l \right) \\ &= \varphi_u(t) \varphi_v(t)\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\forall (u, v, t) \in \mathbb{R}^3 \quad \varphi_{u+v}(t) = \varphi_u(t) \varphi_v(t)$$

III-2.b φ_u est dérivable en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables :

$$\varphi_u'(t) = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \frac{d(\mathbf{L}_n(t))^k}{dt}$$

soit, en utilisant l'expression de $\frac{d(\mathbf{L}_n(t))^k}{dt}$ établie à la question III-1.d,

$$\begin{aligned}\varphi_u'(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} k (\mathbf{L}_n(t))^{k-1} (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} \mathbf{D}_n \\ &= u \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k}{k!} (\mathbf{L}_n(t))^k \right) (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} \mathbf{D}_n \\ &= u \left(\varphi_u(t) - \frac{u^n}{n!} (\mathbf{L}_n(t))^n \right) (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} \mathbf{D}_n \\ &= u \varphi_u(t) (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} \mathbf{D}_n - \frac{u^{n+1}}{n!} (\mathbf{L}_n(t))^n (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} \mathbf{D}_n \\ &= u \varphi_u(t) (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} \mathbf{D}_n - \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d(\mathbf{L}_n(t))^{n+1}}{dt} \\ \varphi_u'(t) &= u \varphi_u(t) (\mathbf{I}_{n+1} + t \mathbf{D}_n)^{-1} \mathbf{D}_n\end{aligned}$$

puisque $(L_n(t))^{n+1} = 0$ d'après le résultat de la question III-1.c. Or, d'après ce qui précède, $\varphi_u(t)$, $L_n(t)$, $(L_n(t))^n$, $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ et D_n sont des polynômes en D_n et commutent donc.

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'_u(t) = u (I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n \varphi_u(t)$

III-2.c D'après la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad D_n \varphi_1(t) = (I_{n+1} + tD_n) \varphi'_1(t)$$

Dérivons cette relation par rapport à t : on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad D_n \varphi'_1(t) = D_n \varphi'_1(t) + (I_{n+1} + tD_n) \varphi''_1(t)$$

Par conséquent, $\forall t \in \mathbb{R} \quad (I_{n+1} + tD_n) \varphi''_1(t) = 0$

Mais $(I_{n+1} + tD_n)$ est connue comme étant inversible depuis la question III-1.a ;

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi''_1(t) = 0$$

Chacune des coordonnées de la matrice $\varphi_1(t)$ est une fonction affine de t puisque de dérivée seconde nulle ; il existe donc un couple (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_1(t) = At + B$$

Déterminons quelles sont ces matrices A et B .

- Spécialisons t à 0 dans la relation définissant φ_1 :

$$\varphi_1(0) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} L_n(0)^k$$

Or, on déduit directement de la définition de $L_n(t)$ que

$$L_n(0) = 0_{n+1} \quad \text{et} \quad L_n^0(0) = I_{n+1}$$

Par suite $\varphi_1(0) = I_{n+1}$, d'où $B = I_{n+1}$.

- D'après la question précédente, $\varphi'_1(0) = D_n \varphi_1(0) = D_n$, donc $A = D_n$.

En conclusion, $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_1(t) = I_{n+1} + tD_n$

III-3 Existence de l'endomorphisme g

III-3.a En utilisant successivement le fait que λ soit strictement positif et le résultat de la question III-2.c, on peut écrire que

$$\lambda I_{n+1} + D_n \underset{\lambda > 0}{=} \lambda \left(I_{n+1} + \frac{1}{\lambda} D_n \right) \underset{\text{III-2.c}}{=} \lambda \varphi_1 \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

Enfin, d'après la question III-2.a,

$$\varphi_1 \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \left(\varphi_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)^2$$

d'où
$$\lambda I_{n+1} + D_n = \left(\pm \sqrt{\lambda} \varphi_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)^2$$

Les matrices $M_{\pm} = \pm \sqrt{\lambda} \varphi_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $M_{\pm}^2 = \lambda I_{n+1} + D_n$.

De plus, l'endomorphisme g_+ (respectivement g_-) de matrice M_+ (resp. M_-) dans la base B_n construite à la question I-3.b vérifie $g^2 = \lambda \text{id}_{E_n} + D_n$.

III-3.b D'après la question précédente, les matrices $M_{\pm} = \pm \varphi_{\frac{1}{2}}(1)$ vérifient bien la relation $M_{\pm}^2 = I_{n+1} + D_n = A_1$. Il reste à les expliciter :

$$L_2(1) = D_2 - \frac{1}{2} (D_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et
$$\varphi_{\frac{1}{2}}(1) = I_2 + \frac{1}{2} L_2(1) + \frac{1}{8} (L_2(1))^2$$

Finalement,

$$M_{\pm} = \pm \varphi_{\frac{1}{2}}(1) = \pm \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QUATRIÈME PARTIE

IV-1 Un développement en série entière

IV-1.a h est continûment dérivable sur $] -1; \infty[$ car la fonction racine carrée l'est sur $] 0; \infty[$. On peut calculer sa fonction dérivée :

$$\forall x > -1 \quad h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)} = \frac{h(x)}{2(1+x)}$$

d'où l'équation différentielle linéaire du premier ordre recherchée :

$$\boxed{\forall x > -1 \quad (1+x)h'(x) - \frac{1}{2}h(x) = 0} \quad (7)$$

La première équation différentielle que l'on « voit » en dérivant, $hh' = \frac{1}{2}$, n'est pas linéaire...

IV-1.b La question précédente invite à appliquer la « méthode de l'équation différentielle ».

- **Premier point :** appliquons le théorème de Cauchy-Lipschitz au système (*) formé de l'équation différentielle précédente et de la condition $h(0) = 1$. On en déduit que h en est l'unique solution. Si l'on parvient à trouver une fonction $\tilde{h}$, développable en série entière et solution du même système, on pourra conclure que $h = \tilde{h}$.
- **Second point :** supposons donc l'existence d'un réel $0 < R < 1$ tel qu'il existe une solution $\tilde{h}$ du système différentiel (*) définie par

$$\forall x \in] -R; R[\quad \tilde{h}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p$$

Par propriété, la dérivée $\tilde{h}'$ de $\tilde{h}$ est également développable en série entière sur $] -R; R[$ et $\tilde{h}$ se dérive « terme à terme » ; on déduit alors de (7) que

$$\forall x \in] -R; R[\quad (1+x) \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) b_{p+1} x^p - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p = 0$$

$$\text{soit} \quad \forall x \in] -R; R[\quad \sum_{p=0}^{+\infty} \left((p+1) b_{p+1} + \left(p - \frac{1}{2} \right) b_p \right) x^p = 0$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle au voisinage de 0, on aboutit à la relation

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad (p+1) b_{p+1} + \left(p - \frac{1}{2} \right) b_p = 0$$

d'où

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad b_{p+1} = -\frac{2p-1}{2(p+1)} b_p} \quad (8)$$

Comme $\tilde{h}$ vérifie (*), on sait en outre que $\tilde{h}(0) = 1$. Nous sommes conduits aux conditions suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}^* & b_p = \frac{(-1)^p}{2^p p!} \prod_{k=1}^p (2p - 2k - 1) \\ b_0 = 1 \end{cases}$$

que l'on montre par récurrence sur p : montrons que la propriété

$$\mathcal{P}(p) : \quad b_p = (-1)^p \frac{\prod_{k=1}^p (2p - 2k - 1)}{2^p p!}$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie par hypothèse car $b_1 = \frac{1}{2}$ d'après (8).
- $\mathcal{P}(q) \implies \mathcal{P}(q+1)$: d'après (8) et $\mathcal{P}(q)$,

$$\begin{aligned} b_{p+1} &= -\frac{2p-1}{2(p+1)} (-1)^p \frac{\prod_{k=1}^p (2p - 2k - 1)}{2^p p!} \\ &= (-1)^{p+1} \frac{\prod_{k=0}^p (2p - 2k - 1)}{2^{p+1} (p+1)!} \\ b_{p+1} &= (-1)^{p+1} \frac{\prod_{k=1}^{p+1} (2(p+1) - 2k - 1)}{2^{p+1} (p+1)!} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\mathcal{P}(q)$ est vraie pour tout $q \geq p$.

Il reste à vérifier que la série ainsi construite a un rayon de convergence non nul. On constate que (pour $p > 0$)

$$\left| \frac{b_{p+1}}{b_p} \right| = \frac{2p-1}{2(p+1)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$$

La règle de D'Alembert s'applique car b_p n'est jamais nul, et permet de conclure que $R = 1$.

Finalement, il existe une solution $\tilde{h}$ de (*) développable en série entière.

L'ordre dans lequel on traite les deux points ci-dessus est sans aucune importance. Cependant, le second reste toujours le plus long et le premier le plus « subtil »... à ne pas oublier.

D'après les deux points précédents, h est développable en série entière sur $] -1 ; 1 [$. Le terme général de la série est $b_p x^p$ pour $p \in \mathbb{N}$, où les b_p sont définis par les relations (8).

IV-1.c

$$\forall x \in]-1; 1[\quad 1+x = h^2(x) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p \right)^2$$

Effectuons le produit de Cauchy :

$$1+x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^n b_p b_{n-p} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

Par unicité du développement en série entière de $1+x$ au voisinage de 0, on obtient

$$c_1 = c_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad c_n = 0$$

IV-2 Existence d'un endomorphisme g de E tel que

$$g^2 = \lambda \operatorname{id}_E + D \quad \text{où } \lambda > 0$$

IV-2.a

Montrons que $T \in L(E)$. Soit $P \in E$ de degré $d^\circ(P) \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $p \geq d^\circ(P) + 1$, $D^p(P) = 0$, on peut écrire, sans problème de convergence,

$$T(P) = \sum_{p=0}^{d^\circ(P)} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p(P) \in E$$

Il reste à montrer que T est linéaire. Commençons par remarquer que

$$\forall P \in E \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad q \geq d^\circ(P) \quad T(P) = \sum_{p=0}^q \frac{b_p}{\lambda^p} D^p(P) \quad (10)$$

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in (E)^2$ et $q = \max(d^\circ(P), d^\circ(Q)) + 1$. Par construction, q est supérieur ou égal à $d^\circ(P) + 1$, $d^\circ(Q) + 1$ et $d^\circ(\alpha P + \beta Q) + 1$.

$$\begin{aligned} \text{D'après (10),} \quad T(\alpha P + \beta Q) &= \sum_{p=0}^q \frac{b_p}{\lambda^p} D^p(\alpha P + \beta Q) \\ &= \sum_{p=0}^q \frac{b_p}{\lambda^p} (\alpha D^p(P) + \beta D^p(Q)) \\ &= \alpha \sum_{p=0}^q \frac{b_p}{\lambda^p} D^p(P) + \beta \sum_{p=0}^q \frac{b_p}{\lambda^p} D^p(Q) \\ T(\alpha P + \beta Q) &= \alpha T(P) + \beta T(Q) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$T \in L(E)$$

IV-2.b

Soit $P \in E$ de degré $d^\circ(P)$. Calculons $T^2(P)$. Commençons par exprimer, pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$D^q(T(P)) = D^q \left(\sum_{p=0}^{d^\circ(P)} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p(P) \right) = \sum_{p=0}^{d^\circ(P)} \frac{b_p}{\lambda^p} D^{p+q}(P)$$

et utilisons cette expression dans celle de $T^2(P)$:

$$T^2(P) = \sum_{q=0}^{d^\circ(T(P))} \frac{b_q}{\lambda^q} D^q(T(P)) = \sum_{q=0}^{d^\circ(T(P))} \frac{b_q}{\lambda^q} \sum_{p=0}^{d^\circ(P)} \frac{b_p}{\lambda^p} D^{p+q}(P)$$

On peut alors remarquer que pour tout polynôme P non nul, tous les termes intervenant dans la somme $T(P)$ sont des polynômes de degrés strictement inférieurs à P à l'exception du premier terme de cette somme, qui est $\frac{b_0}{\lambda^0} D^0(P) = \frac{b_0}{1} P = P$. Nous venons de démontrer que $d^\circ(T(P)) = d^\circ(P)$, cette propriété restant valable lorsque P est nul.

Bilan : $\forall P \in E \quad d^\circ(T(P)) = d^\circ(P)$

Posons alors $n = d^\circ(P)$; il vient

$$T^2(P) = \sum_{q=0}^{d^\circ(T(P))} \frac{b_q}{\lambda^q} \sum_{p=0}^{d^\circ(P)} \frac{b_p}{\lambda^p} D^{p+q}(P) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n b_p b_q \frac{1}{\lambda^{p+q}} D^{p+q}(P)$$

et comme $D^r(P) = 0$ pour $r \geq n+1$, on en déduit

$$\begin{aligned} T^2(P) &= \sum_{r=0}^n \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / p+q=r} b_p b_q \frac{1}{\lambda^r} D^r(P) \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{p=0}^r b_p b_{r-p} \frac{1}{\lambda^r} D^r(P) \\ T^2(P) &= \sum_{r=0}^n c_r \frac{1}{\lambda^r} D^r(P) \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant le résultat de la question IV-1.c sachant que $n \geq 1$, on obtient finalement

$$T^2(P) = \left(\frac{1}{\lambda^0} D^0 + \frac{1}{\lambda^1} D^1 \right) (P) = \left(\text{id}_E + \frac{1}{\lambda} D \right) (P)$$

En conclusion,

$$T^2 = \text{id}_E + \frac{1}{\lambda} D$$

IV-2.c Les applications $g_{\pm} = \pm \sqrt{\lambda} T$:

- sont des endomorphismes de E d'après la question IV-2.a ;
- vérifient $g_{\pm}^2 = \lambda T^2 = \lambda \text{id}_E + D$ d'après le résultat de la question IV-2.b.

IV-2.d D'après les questions I-1.b et IV-2.c, $g_{\pm}(E_n) \subset E_n$ et l'endomorphisme $g_{\pm_n}$ induit par $g_{\pm}$ sur E_n vérifie la relation

$$g_{\pm_n}^2 = \lambda \text{id}_{E_n} + D$$

Par définition,

$$\begin{aligned} g_{\pm_n} &= g_{\pm}|_{E_n} \\ &= \pm \sqrt{\lambda} T|_{E_n} \\ &= \pm \sqrt{\lambda} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p \right) |_{E_n} \\ g_{\pm_n} &= \pm \sqrt{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{b_p}{\lambda^p} (D^p)|_{E_n} \end{aligned}$$

mais $D^p|_{E_n} = D_n^p = 0$ dès que $p \geq n + 1$ et il reste finalement

$$g_{\pm n} = \pm \sqrt{\lambda} \sum_{p=0}^n \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$$

On pose par exemple $g_n = \sqrt{\lambda} \sum_{p=0}^n \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$ qui est bien un polynôme en D_n .

Le problème posé à la question I-4.b correspond au cas où $\lambda = 1$ et $n = 2$. Dans ces conditions,

$$g_n = b_0 D_2^0 + b_1 D_2 + b_2 D_2^2$$

et il reste à calculer les coefficients b_0, b_1 et b_2 . D'après les relations (9) obtenues à la question IV-1.b, ceux-ci sont :

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{8}$$

et l'on retrouve le résultat de la question I-4.b, à savoir que les matrices

$$M_{\pm} = \pm \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

représentant les endomorphismes $g_{\pm 2}$ dans la base B_2 vérifient l'équation

$$M_{\pm}^2 = A_1$$