

Normes

1 _____ (**) _____

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$. Pour tout $f \in E$, on définit

$$N_1(f) = \|f + f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

- (a). Vérifier que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que N_1 et N_2 sont des normes sur E .
 (b). Déterminer deux réels α et β strictement positifs tels que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$. (comparer $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ puis $\|f'\|_\infty$ et $\|g'\|_\infty$ avec $g : t \mapsto f(t)e^t$). Que peut-on en déduire ?

2 _____ (**) _____ **X PC 2012**

Soit E l'ensemble des suites bornées dont le premier élément est nul. On le muni de la norme infinie et on définit de plus

$$\|(u_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

- (a). Montrer que $\|\cdot\|_1$ est un norme sur E .
 (b). Comparer $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$. Les normes sont-elles équivalentes ?

3 _____ (***) _____

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[0; 1]$, on note

$$N_a : f \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|f(a_k)|}{2^k}$$

- (a) Montrer que l'application N_a est une norme sur E si et seulement si $\overline{\{a_n, n \in \mathbb{N}\}} = [0; 1]$.
 (b) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $[0; 1]$ telle que $\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. Justifier que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

4 _____ (**) _____

On admet que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (a). Donner un exemple de matrices A et B telles que AB soit nulle et BA non nulle.
 (b). En déduire qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|P^{-1}MP\| = \|M\|$ pour toute matrice M et toute matrice inversible P .

5 _____ (**) _____

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-|t|} |f(t)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 - e^{-|t|}) |f(t)|$$

- (a). Montrer que N_1 et N_2 sont des normes
 (b). Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Topologie

6 _____ (*) _____

Si A est une partie non vide et bornée d'un espace vectoriel normé E , on appelle diamètre de A et on note $\delta(A)$ le réel

$$\delta(A) = \sup_{x, x' \in A} d(x, x')$$

Montrer que si A est bornée, alors A° et $\overline{A}$ le sont également et que

$$\delta(A^\circ) \leq \delta(A) = \delta(\overline{A})$$

sous réserve que A° est non vide. L'inégalité peut-elle être stricte ?

7 _____ (*) _____

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (*)$$

- (a). Montrer que f est impaire.
- (b). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(kx) = kf(x)$.
- (c). Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout rationnel r , on ait $f(r) = \alpha r$.
- (d). En déduire l'ensemble des fonctions satisfaisant la propriété ci-dessus.

8 _____ (*) _____

Soit K un fermé borné de $\mathbb{C}$ dont tous les éléments sont de norme < 1 . Justifier l'existence d'un réel $r \in [0; 1[$ tel que tout élément de K soit de norme $\leq r$.

9 _____ (*) _____

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $f, g \in E$. Montrer que l'ensemble suivant est un ouvert de E :

$$\Omega = \{h \in E, \quad \forall x \in [0; 1], \quad f(x) < h(x) < g(x)\}$$

10 _____ (**) _____

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note

$$A = \left\{ f \in E, \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

- (a). Montrer que A est un fermé de E .
- (b). Montrer que pour tout élément f de A , $\|f\|_\infty > 1$.
- (c). Calculer $d(0, A)$.

11 _____ (**) _____

Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans lui-même. On pose

$$F = \{x \in [0; 1], \quad f(x) = x\}$$

- (a). Montrer que F est non vide et fermé.
- (b). Réciproquement, on considère une partie A fermée et non vide de $[0; 1]$. Déterminer une fonction f continue de $[0; 1]$ dans lui-même pour laquelle $F = A$, F étant défini comme ci-dessus.

12 _____ (**) _____ **Centrale MP 2012**

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note X l'ensemble des matrices semblables à A . Montrer que X est borné si et seulement si A est une matrice d'homothétie.

Suites et fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé

13 _____ (*) _____

Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 et $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et non constante.

- (a). Montrer que f est bornée sur $\mathbb{U}$ et qu'elle atteint sa borne supérieure M et sa borne inférieure m .
- (b). Justifier que f prend au moins deux fois tout valeur $y \in]m; M[$.

14 _____ (*) _____

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \rightarrow F$ une application continue et surjective, et A une partie de E . On suppose que $\overline{A} = E$. Montrer que $\overline{f(A)} = F$.

15 _____ (*) _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (i) l'image réciproque de tout fermé borné est un fermé borné ;
- (ii) la fonction $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$.

16 _____ (*) _____

Soit K une partie compacte (c'est-à-dire fermée et bornée) d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que f est une application de K dans K faiblement contractante

$$\forall x \neq y \in K, \quad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \quad (*)$$

Montrer que f a un unique point fixe.

17 _____ (**) _____

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et f un élément de $\mathcal{L}(E)$. On suppose que $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ et on pose $g = \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k$. Montrer que g est la projection sur $\text{Ker}(f - I_d)$ parallèlement à $\text{Im}(f - I_d)$.

18 _____ (**) _____ **ENS PC 2001**

- (a). Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$. Même chose avec le complémentaire d'une boule fermée.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- (b). Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $F^{-1}(\{c\})$ soit un singleton. Que peut-on dire de c ?
 (c). On suppose que il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F^{-1}(\{c\})$ est un fermé borné non vide. Montrer que F admet un extremum.
 (d). Les résultats sont-ils conservés pour une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

19 _____ (**) _____ **X-ENS PSI 2014**

On considère une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de taille $n \geq 3$ dont les coefficients sont tous strictement positifs et telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$$

On note $d = \min \{m_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n\}$. Si Z est une matrice colonne de $\mathbb{R}^n$, on note $\min(Z)$ (resp. $\max(Z)$) le minimum (resp. maximum) de ses coordonnées.

- (a). Montrer que $d \leq 1/n$.
 (b). Justifier que si Y est une colonne dont les coordonnées sont positives, alors $\min(MY) \geq d \max(Y)$.
 (c). Montrer que pour toute colonne Y , on a

$$\min(MY) \geq d \max(Y) + (1 - d) \min(Y)$$

On pourra se ramener à la question précédente à l'aide du vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1.

- (d). En déduire que pour toute colonne Y , on a

$$\max(MY) - \min(MY) \leq (1 - 2d) (\max(Y) - \min(Y))$$

- (e). On fixe une colonne Z et on considère la suite définie par

$$U_0 = Z \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad U_{m+1} = M \cdot U_m$$

Montrer que la suite $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge.

- (f). En déduire que la suite $(M^m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de rang 1.

20 _____ (**) _____ **Mines PC 2016**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique. On note

$$G_f = \{T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$$

- (a). On suppose f continue. Montrer que G_f est un fermé.
 (b). Donner un exemple de fonction pour laquelle $G_f = \mathbb{Q}$.
 (c). Soit f une fonction telle que 1 et $\sqrt{2}$ soient tous deux des éléments de G_f . Montrer que l'équation $f(x) = f(0)$ possède une infinité de solutions dans $]0; \pi/2[$.

21 _____ (***) _____ **X PC 2016**

Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- (i) Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}_+$ non borné tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $U \cap (x\mathbb{N})$ est fini.
- (ii) Il existe $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ mais telle que f n'ait pas de limite en $+\infty$.

Exercices supplémentaires non corrigés

22 _____ (*) _____ **Mines PC 2024**

Les parties E et F suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles fermées ? bornées ?

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2(x-1)(x-3) = y^2(y^2-4)\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 - y(y-1) = 0\}$$

23 _____ (***) _____ **X PC 2024**

On note E l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes appartenant à E . Déterminer l'adhérence de A .

24 _____ (***) _____ **X PC 2024**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continues, bijectives et de réciproque continues telles que pour toute droite D de $\mathbb{R}^2$, $f(D)$ est également une droite.

25 _____ (***) _____ **X PC 2024**

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, c'est-à-dire que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$, l'application $f : t \rightarrow f(u + tv)$ est convexe. Montrer que f est continue.

26 _____ (***) _____ **X PC 2024**

Soit E une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que $B(0, 1) \subset E$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(E) \subset E$. Montrer que $|\det M| \leq 1$.

- 1** (b) Utiliser l'indication et l'inégalité des accroissements finis.
- 2** (b). Remarquer que $\|\cdot\|_1 \leq 2\|\cdot\|_\infty$. Construire ensuite une suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E (c'est-à-dire une suite de suites) telle que $\|u_p\|_\infty$ soit constante égale à 1, mais avec $\|u_p\|_1$ de limite nulle lorsque p tend vers $+\infty$.
- 3** (a) Ne pas oublier de montrer que N_a est bien définie. Justifier ensuite qu'elle vérifie systématiquement toutes les propriétés d'une norme, sauf éventuellement la propriété de séparation.
 Pour montrer le sens indirect, utiliser le fait que si A est une partie dense de $[0; 1]$, tout point de cet intervalle est limite d'une suite d'éléments de A . Pour le sens direct, raisonner par contraposée sachant que si une partie A n'est pas dense, il existe un intervalle de $[0; 1]$ non réduit à un point ne contenant aucun élément de A .
- (b) Par symétrie des rôles, on peut considérer un entier p tel que a_p n'appartienne pas à $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. Construire à l'aide de ce point une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $(N_b(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit de limite nulle mais pas $(N_a(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$.
- 4** (b). Raisonner par l'absurde et utiliser une suite de matrices inversible qui tend vers B où B est la matrice proposée à la question précédente.
- 5** (b). Utiliser une fonction f_n positive qui atteint son maximum en 0 (resp. en n) tandis que $f_n(x)$ (resp. $f_n(n+x)$) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout $x \neq 0$.
- 6** Pour une inégalité stricte, on pourra envisager de donner un exemple de partie A telle que A° soit vide.
- 7** (a) Commencer par déterminer la valeur de $f(0)$.
 (c) Exprimer $f(1/q)$ en fonction de $f(1)$ pour tout entier q non nul.
 (d) Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la continuité de f .
- 8** On pourra introduire $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$
 $z \longmapsto \|z\|$.
- 9** Interpréter géométriquement le résultat à montrer et utiliser le fait qu'une fonction strictement positive de E atteint sa borne inférieure et qu'elle est > 0 .
- 10** (a) Vérifier que si f est limite d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A , alors $f \in A$.
 (b) Utiliser l'inégalité de la moyenne.
 (c) On rappelle que $d(0, A) = \inf_{f \in A} d(0, f) = \inf_{f \in A} \|f\|_\infty$. D'après le (b), $d(0, A) \geq 1$.
- 11** (a) Utiliser l'application $g : x \longmapsto d(x, A)$. Vérifier que g est continue et que $g(x) = 0$ si et seulement si x appartient à A .
- 12** Lorsque X est supposé borné, étudier l'effet sur la matrice A des conjugaisons $M \longmapsto P^{-1}MP$ par des matrices P de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \rho^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \rho > 0$$

pour montrer que A est diagonale. Après quoi, étudier l'effet des conjugaisons par des matrices diagonales par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-r-2} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour montrer que tous les coefficients diagonaux sont égaux.

- 13** (b) Introduire des réels α et β tels que f atteint son maximum et son minimum en respectivement en $z_1 = e^{i\alpha}$ et $z_2 = e^{i\beta}$.
 Raisonner à l'aide des deux arcs joignant les points d'affixes z_1 et z_2 .
- 14** Appliquer simplement les définitions!
- 15** Appliquer simplement les définitions!
- 16** On pourra justifier la continuité de l'application $g : x \longmapsto \|f(x) - x\|$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$.
- 17** Utiliser après l'avoir justifié que $g \circ g = g = f \circ g = g \circ f$ et que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \subset \text{Im } g$.
- 18** (a) On pourra éventuellement se contenter d'un raisonnement graphique.
 (b) Justifier que c est un extremum global en raisonnant par l'absurde.
 (c) Justifier que l'un des deux extremums globaux de f atteints sur $F^{-1}(c)$ est un extremum global sur $\mathbb{R}^2$.
 (d) Donner un contre-exemple trivial qui invalide chacune des deux affirmations.

- 19** (e). Justifier que les suites $(\max(U_m))_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\min(U_m))_{m \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- (f). Remarquer d'une part que la i -ième colonne de M^m est égale à $M^n E_i$ où E_i le i -ième élément de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, d'autre part que la limite de $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de la question précédente appartient une droite vectorielle indépendante de Z .
- 20** (a) Utiliser la caractérisation séquentielle des fermés (en travaillant à x fixé).
- (b) Utiliser une fonction de la forme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour une partie X bien choisie.
- $$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
- (c) Poser $A = \{p + q\sqrt{2}, p, q \in \mathbb{Z}\}$ et vérifier que cet ensemble contient une infinité d'éléments deux à deux distincts dans $]0; 1[$.
- 21** Pour le sens indirect, commencer par écrire le fait que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$ à l'aide de quantificateurs. Définir alors U comme l'image réciproque d'un ouvert bien choisi et vérifier qu'il convient.
- Pour le sens direct, on pourra vérifier que l'application $g : x \longmapsto d(x, \overline{U})$ vérifie les deux premières hypothèses, et la multiplier par une fonction h bien choisie de manière à satisfaire la dernière hypothèse.

1 ————— (**) —————

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$. Pour tout $f \in E$, on définit

$$N_1(f) = \|f + f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

- (a). Vérifier que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que N_1 et N_2 sont des normes sur E .
 (b). Déterminer deux réels α et β strictement positifs tels que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$. (comparer $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ puis $\|f'\|_\infty$ et $\|g'\|_\infty$ avec $g : t \mapsto f(t)e^t$). Que peut-on en déduire ?

- (a). Il est clair que E est un espace vectoriel en tant que noyau de la forme linéaire $f \mapsto f(0)$ définie sur $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. De plus, N_1 et N_2 sont parfaitement définies sur E en tant que borne supérieures de fonctions continues sur le segment $[0; 1]$.

Le fait que $\|\cdot\|_\infty$ soit une norme et la linéarité de la dérivation assure la positive homogénéité et l'inégalité triangulaire pour N_1 et N_2 . Reste la propriété de séparation :

- Si f est telle que $N_1(f) = 0$, alors $f + f' = 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda e^x$ pour tout $x \in [0; 1]$. L'hypothèse $f(0) = 0$ prouve que f est donc nulle.
- Si $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = 0$, alors puisque les deux termes sont positifs, on a notamment $\|f\|_\infty = 0$ donc $f = 0$.

N_1 et N_2 sont des normes sur E .

- (b). Il est clair que $N_1 \leq N_2$. Soit maintenant $f \in E$. Dans un premier temps, par inégalité des accroissements finis appliqués entre 0 et $x \in [0; 1]$, il vient

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq x \|f'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$$

d'où en passant au sup $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$ puis $N_2(f) \leq 2\|f'\|_\infty$

Notons ensuite $g : t \mapsto f(t)e^t$. Alors g est dérivable et

$$\forall t \in [0; 1], \quad g'(t) = (f(t) + f'(t))e^t \quad \text{d'où} \quad \|g'\|_\infty \leq eN_1(f)$$

On a également $f(t) = g(t)e^{-t}$ donc de la même manière, il vient

$$\|f'\|_\infty \leq \|g' - g\|_\infty \leq N_2(g) \leq 2\|g'\|_\infty \leq 2eN_1(f)$$

Finalement

$N_2(f) \leq 2\|f'\|_\infty \leq 4eN_1(f)$

Soit maintenant $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions et g un élément de E . L'encadrement précédent montre que

$$N_1(f_n - g) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad N_2(f_n - g) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par suite,

Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

2 ————— (**) ————— X PC 2012

Soit E l'ensemble des suites bornées dont le premier élément est nul. On le muni de la norme infinie et on définit de plus

$$\|(u_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

- (a). Montrer que $\|\cdot\|_1$ est un norme sur E .
 (b). Comparer $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$. Les normes sont-elles équivalentes ?

- (a). Il est clair que E un espace vectoriel en tant que noyau de l'application linéaire $u \mapsto u_0$ définie sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Par ailleurs, $\|\cdot\|_1$ est bien définie car tout élément u de E est bornée donc il en est de même de $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il est clair que $\|\cdot\|_1$ vérifie la propriété de positive homogénéité. Soit maintenant $u, v \in E$. Pour tout entier n , on a

$$|(u+v)_{n+1} - (u+v)_n| = |u_{n+1} + v_{n+1} - u_n - v_n| \leq |u_{n+1} - u_n| + |v_{n+1} - v_n| \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$$

En passant à la borne supérieure, on obtient la propriété de l'inégalité triangulaire. Enfin,

$$\|u\|_1 = 0 \quad \implies \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = 0 \quad \implies \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 = 0$$

Tout ceci prouve que

L'application $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

(b). Soit $u \in E$. Pour tout entier n , on a $|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2 \|u\|_\infty$

En passant à la borne supérieure, il vient $\|u\|_1 \leq 2 \|u\|_\infty$

ce qui prouve que

La norme $\|\cdot\|_\infty$ domine la $\|\cdot\|_1$.

On définit la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_p)_n = \begin{cases} n/p & \text{si } n \leq p \\ 1 & \text{si } n > p \end{cases}$$

Ainsi définie, on a $\|u_p\|_1 = 1/p$ et $\|u_p\|_\infty = 1$ de sorte que la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers la suite nulle pour $\|\cdot\|_1$ mais pas pour $\|\cdot\|_\infty$. Par conséquent,

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

3 (***)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[0; 1]$, on note

$$N_a : f \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|f(a_k)|}{2^k}$$

- (a) Montrer que l'application N_a est une norme sur E si et seulement si $\overline{\{a_n, n \in \mathbb{N}\}} = [0; 1]$.
- (b) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $[0; 1]$ telle que $\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. Justifier que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

- (a) Il est clair que E est un espace vectoriel. Si f est un élément de E , alors f est continue sur un segment donc bornée. On en déduit que

$$\frac{|f(a_k)|}{2^k} = O\left(\frac{1}{2^k}\right)$$

ce qui prouve que la série est convergente par comparaison aux séries géométriques. L'application N_a est donc bien définie.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et toutes fonctions $f, g \in E$, on a

$$|\lambda f(a_k)| = |\lambda| |f(a_k)| \quad \text{et} \quad |(f+g)(a_k)| = |f(a_k) + g(a_k)| \leq |f(a_k)| + |g(a_k)|$$

En divisant ces inégalités par 2^k puis en sommant de 0 à l'infini, on obtient immédiatement l'inégalité triangulaire et la positive homogénéité pour N_a . Le fait que N_a soit une norme dépend donc uniquement du fait qu'elle vérifie ou non la propriété de séparation.

$\Rightarrow$ Soit f telle que $N_a(f) = 0$. Alors, puisque $N_a(f)$ est une somme de quantités positives, il vient que f s'annule sur la partie dense $A = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ de $[0; 1]$. Si x est un réel quelconque de cet intervalle, il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A de limite x . Mais puisque $f(a_k) = 0$ pour tout k d'après ce qui précède, il vient $f(x) = 0$ par passage à la limite et continuité de f . Le réel x étant arbitraire, f est nulle et N_a vérifie la séparation donc est une norme sur E .

$\Leftarrow$ Raisonnons par contraposée en supposant que $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ ne soit pas une partie dense. Il existe alors un segment I que l'on peut noter $[a; b]$ inclus dans $[0; 1]$ et non réduit à un point qui ne contient aucune valeur de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Posons alors

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)(x-b) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f s'annule en tout point n'appartenant pas à $[a; b]$ donc sur $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, $N_a(f) = 0$ bien que f ne soit pas la fonction nulle, et N_a n'est donc pas une norme.

N_a est une norme si et seulement si $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0; 1]$.

- (b) On suppose maintenant que les ensembles $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts. On peut alors supposer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \notin B$. Notons alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies de la manière suivante :
- $f_n(a_p) = 1$ et f_n est nulle en dehors de $]a_p - 1/n; a_p + 1/n[$.
 - f_n est affine sur $]a_p - 1/n; a_p[$ et $]a_p; a_p + 1/n[$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Ainsi définie, f_n est à valeurs dans $[0; 1]$ et vaut 1 en a_p donc

$$N_a(f_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|f_n(a_k)|}{2^k} \geq \frac{|f_n(a_p)|}{2^p} = \frac{1}{2^p}$$

Cette minoration prouve donc que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 pour la norme N_a . Par ailleurs, pour tout entier N arbitrairement fixé,

$$N_b(f_n) \leq \sum_{k=0}^N \frac{|f_n(b_k)|}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^N \frac{|f_n(b_k)|}{2^k} + \frac{1}{2^N}$$

Puisque $b_0, \dots, b_N$ sont tous distincts de a_p , il existe un rang n_0 à partir duquel aucun d'entre eux n'appartient à l'intervalle $[a_p - 1/n; a_p + 1/n]$. Dès lors, f_n s'annule en chacun et la majoration précédente devient

$$\forall n \geq n_0, \quad N_b(f_n) \leq \frac{1}{2^N}$$

L'entier n_0 dépend de N , mais ce dernier a été pris arbitraire. Si l'on fixe $\epsilon > 0$, on peut trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/2^N < \epsilon$, puis un rang n_0 à partir duquel $N_b(f_n) \leq 1/2^N < \epsilon$. Cela assure que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour N_b . Ainsi,

Les convergences pour N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

4 _____ (**) _____

On admet que $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que $\overline{\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (a). Donner un exemple de matrices A et B telles que AB soit nulle et BA non nulle.
- (b). En déduire qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|P^{-1}MP\| = \|M\|$ pour toute matrice M et toute matrice inversible P .

- (a). Il suffit de prendre $A = E_{1,1}$ et $B = E_{2,1}$ où $(E_{i,j})_{i,j \in [1;n]^2}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$E_{1,1} \cdot E_{2,1} = 0 \quad \text{et} \quad E_{2,1} \cdot E_{1,1} = E_{2,1} \neq 0$$

- (b). Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'une telle norme. Notons A et B les deux matrices de la question précédente. Puisque $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une suite de matrices inversibles $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ convergente vers B . Alors, pour tout entier p ,

$$A B_p = B_p^{-1} (B_p A) B_p \quad \text{et donc} \quad \|A B_p\| = \|B_p A\|$$

Par continuité de $M \mapsto AM$, $M \mapsto MA$ (qui sont linéaires) et continuité de la norme, on peut passer à la limite en faisant tendre p vers $+\infty$ et il vient

$$\|AB\| = \|BA\|$$

Sachant que AB est nulle mais pas BA , cela contredit la propriété de séparation. Par conséquent,

Il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
 $\forall (M, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K}), \quad \|M\| = \|P^{-1}MP\|$

5 _____ (**) _____

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-|t|} |f(t)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 - e^{-|t|}) |f(t)|$$

- (a). Montrer que N_1 et N_2 sont des normes
- (b). Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Pour simplifier, on note $h_1 : t \mapsto e^{-|t|}$ et $h_2 : t \mapsto (1 - e^{-|t|})$. Il est clair que N_1 et N_2 sont bien définies car si f est bornée, il en est de même de $f h_1$ et $f h_2$. Justifions qu'il s'agit de normes. On introduit pour cela la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $f \in E$ et tout scalaire λ , on a

$$N_1(\lambda f) = \|\lambda f h_1\|_\infty = |\lambda| \|f h_1\|_\infty = |\lambda| N_1(f)$$

La preuve est identique pour N_2 .

- Pour tous $f, g \in E$, on a

$$N_1(f + g) = \|(f + g)h_1\|_\infty \leq \|f h_1\|_\infty + \|g h_1\|_\infty = N_1(f) + N_1(g)$$

A nouveau, la preuve est identique pour N_2 .

- Si f est tel que $N_1(f) = 0$, alors $\|f h_1\|_\infty = 0$ et donc $f h_1 = 0$. Mais comme h_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, c'est que f est nulle.

Pour la norme N_2 , on ne peut pas conclure directement car h_2 s'annule en 0. On a seulement f nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais la continuité de f permet de conclure à la nullité de f .

Finalement

N_1 et N_2 sont des normes sur E .

Introduisons les deux suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout entier $n \geq 1$,

- f_n est nulle en dehors de $I_n = [-1/n; 1/n]$, affine sur $[-1/n; 0]$ et $[0; 1/n]$, et prend la valeur 0 en 1. En particulier, elle est à valeurs dans $[0; 1]$ donc bornée.
- f_n est nulle en dehors de $J_n = [n - 1/n; n + 1/n]$, affine sur $[n - 1/n; n]$ et $[n; n + 1/n]$, et prend la valeur 0 en n . En particulier, elle est également à valeurs dans $[0; 1]$ donc bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut remarquer que par construction,

$$N_1(f_n) = \|f_n h_1\|_\infty \geq (f_n h_1)(1) = 1 \quad \text{et} \quad N_2(g_n) = \|g_n h_2\|_\infty \geq (g_n h_2)(n) = 1 - e^{-n}$$

Par ailleurs, f_n étant nulle en dehors de I_n et g_n nulle en dehors de J_n ,

$$N_2(f_n) = \|f_n h_2\|_{\infty, I_n} \leq \|f_n\|_\infty \|h_2\|_{\infty, I_n} = 1 - e^{-1/n} \quad \text{et} \quad N_2(g_n) = \|g_n h_1\|_{\infty, J_n} \leq \|g_n\|_\infty \|h_1\|_{\infty, J_n} = e^{-n+1/n}$$

Il résulte de ces inégalités que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour N_2 (resp. N_1) mais pour pour N_1 (resp. N_2). Par conséquent,

La convergence pour N_1 (resp. N_2) n'implique pas la convergence pour N_2 (resp. N_1).

6 ————— (*) —————

Si A est une partie non vide et bornée d'un espace vectoriel normé E , on appelle diamètre de A et on note $\delta(A)$ le réel

$$\delta(A) = \sup_{x, x' \in A} d(x, x')$$

Montrer que si A est bornée, alors A° et $\overline{A}$ le sont également et que

$$\delta(A^\circ) \leq \delta(A) = \delta(\overline{A})$$

sous réserve que A° est non vide. L'inégalité peut-elle être stricte ?

Le caractère borné de A° est immédiat dès lors que A° est inclus dans A . Montrons que $\overline{A}$ l'est également. Puisque A est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$. Soit maintenant $y \in \overline{A}$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente de limite y . Alors, par continuité de la norme,

$$\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|y\| \quad \text{d'où} \quad \|y\| \leq M$$

par passage à la limite sur l'inégalité $\|x_n\| \leq M$. Ainsi, A est également bornée.

Si A est bornée, alors A° et $\overline{A}$ le sont également.

L'encadrement $\delta(A^\circ) \leq \delta(A) \leq \delta(\overline{A})$ découle à nouveau des inclusions $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$. Il reste donc à démontrer que $\delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$. Considérons donc $x, x' \in \overline{A}$ et fixons $r > 0$. Par définition,

$$B_{x,r} \cap A \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B_{x',r} \cap A \neq \emptyset$$

Soit donc a et a' deux éléments de A tels que $\|x - a\| < r$ et $\|x' - a'\| < r$. Par suite,

$$\begin{aligned} \|x - x'\| &= \|x - a + a - a' + a' - x'\| \\ &\leq \|x - a\| + \|a - a'\| + \|a' - x'\| \\ \|x - x'\| &\leq \delta(A) + 2r \end{aligned}$$

L'inégalité étant valable pour tout $x, x' \in \overline{A}$, on peut passer à la borne supérieure et ainsi

$$\delta(\overline{A}) \leq \delta(A) + 2r$$

Le réel r ayant été pris arbitraire, on obtient l'inégalité souhaitée en faisant tendre r vers 0. Finalement,

$$\delta(A^\circ) \leq \delta(A) = \delta(\overline{A})$$

Pour obtenir une inégalité stricte, il suffit de considérer $A = [0; 1] \cup \{2\}$. Alors, $A^\circ =]0; 1[$ de diamètre 1 tandis que $\overline{A}$ est de diamètre 2.

7 _____ (*) _____

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\star)$$

- (a). Montrer que f est impaire.
- (b). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(kx) = kf(x)$.
- (c). Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout rationnel r , on ait $f(r) = \alpha r$.
- (d). En déduire l'ensemble des fonctions satisfaisant la propriété ci-dessus.

(a). Par hypothèse, $f(0+0) = f(0) + f(0)$ d'où $f(0) = 0$

puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x-x) = f(0) = f(x) + f(-x)$ d'où $f(-x) = -f(x)$

Par conséquent

La fonction f est impaire.

(b). La preuve est immédiate par récurrence sur k pour $k \in \mathbb{N}^*$. L'impairité de f assure alors le résultat pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

$$\forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad f(kx) = kf(x)$$

(c). D'après la question précédente, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$f(1) = f(q/q) = qf(1/q) \quad \text{d'où} \quad f(1/q) = f(1)/q$$

Par conséquent, si r est un rationnel quelconque, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$f(p/q) = pf(1/q) = pf(1)/q = f(1)(p/q)$$

soit bien

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = f(1)r$$

(d). Soit f une fonction continue satisfaisant $(\star)$ et x un réel quelconque. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x . Le résultat de la question précédente assure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(r_n) = f(1)r_n$$

Puisque $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que f est continue, on peut passer à la limite et obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(1)x$$

Le réel x ayant été pris arbitraire, on en déduit que f est une application de la forme $x \mapsto \alpha x$, avec $\alpha = f(1)$ un réel quelconque. Réciproquement, toute application de cette forme est clairement continue et vérifie la propriété $(\star)$.

Les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$ sont celles de la forme $x \mapsto \alpha x$ où α est un réel quelconque.

8 _____ (*) _____

Soit K un fermé borné de $\mathbb{C}$ dont tous les éléments sont de norme < 1 . Justifier l'existence d'un réel $r \in [0; 1[$ tel que tout élément de K soit de norme $\leq r$.

L'application $\|\cdot\|$ est continue sur le compact K (car une norme est 1-lipschitzienne). Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Notons donc x_0 de norme minimal dans K et $r = \|x_0\|$. Alors par hypothèse, $r < 1$ et par définition de x_0 , $r < \|x\|$ pour tout $x \in K$.

Il existe $r < 1$ tel que tout élément de K est norme $\leq r$.

9 _____ (*) _____

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $f, g \in E$. Montrer que l'ensemble suivant est un ouvert de E :

$$\Omega = \{h \in E, \quad \forall x \in [0; 1], \quad f(x) < h(x) < g(x)\}$$

Soit h_0 un élément de Ω . Notons $\alpha = \inf_{[0;1]}(h_0 - f)$ et $\beta = \inf_{[0;1]}(g - h_0)$

Puisque f, g et h_0 sont continues sur le segment $[0; 1]$, ces deux bornes sont atteintes et donc strictement positives par définition de Ω . Prenons maintenant $r = \min(\alpha, \beta)$ et vérifions que $B_{h_0, r} \subset E$. Si h est tel que $\|h - h_0\|_\infty < r$, alors pour tout réel x ,

$$h(x) - f(x) = \underbrace{(h(x) - h_0(x))}_{> -r} + \underbrace{(h_0(x) - f(x))}_{\geq \alpha} > 0$$

De même,

$$g(x) - h(x) = \underbrace{(g(x) - h_0(x))}_{> -r} + \underbrace{(h_0(x) - h(x))}_{\geq \beta} > 0$$

Par conséquent, on a bien $f(x) < g(x) < h(x)$ lorsque h appartient à $B(h_0, r)$ d'où $B_{h_0, r} \subset E$. Ainsi,

L'ensemble Ω est un ouvert de E .

10

(**)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note

$$A = \left\{ f \in E, \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

- (a). Montrer que A est un fermé de E .
- (b). Montrer que pour tout élément f de A , $\|f\|_\infty > 1$.
- (c). Calculer $d(0, A)$.

- (a). Notons φ_0 et φ_1 les formes linéaires définies sur E par

$$\varphi_0 : f \mapsto f(0) \quad \text{et} \quad \varphi_1 : f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$$

Ces applications sont continues lorsque E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ car 1-lipschitziennes. En effet, pour tous $f, g \in E$,

$$|f(0) - g(0)| \leq \|f - g\|_\infty \quad \text{et} \quad \left| \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \leq \|f - g\|_\infty$$

Dès lors, A est l'intersection de deux images réciproques de deux fermés de $\mathbb{R}_+$, précisément

$$A = \varphi_0^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_1^{-1}([1; +\infty[)$$

Ainsi,

A est un fermé de E .

- (b). Soit $f \in A$. On raisonne par l'absurde en supposant $\|f\|_\infty \leq 1$. Alors

$$1 \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty \leq 1$$

Il s'ensuit que toutes ces quantités sont égales et notamment,

$$\int_0^1 (\|f\|_\infty - f(t)) dt = 0$$

$\|f\|_\infty - f$ étant positive et continue, elle est identiquement nulle, ce qui prouve que $f = \|f\|_\infty$ et donc $f(0) = \|f\|_\infty = 1$ ce qui contredit le fait que $f \in A$. Par suite,

Pour tout élément f de A , $\|f\|_\infty \geq 1$.

- (c). D'après le résultat de la question (b), on a $d(0, A) \geq 1$. Pour montrer qu'elle est égale à 1, on doit trouver une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $(\|f_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ soit de limite 1. On choisit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite 1, par exemple $b_n = 1 + 1/n$ puis on construit alors f_n de la manière suivante :

- f_n est constante égale à b_n sur $[a_n; 1]$.
- $f_n(0) = 0$ et f_n est affine sur $[0; a_n]$.

Le réel a_n est alors choisi de manière à satisfaire la condition $\int_0^1 f_n(t) dt \geq 1$. La fonction f_n construite, on a

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{a_n} \frac{b_n}{a_n} t dt + \int_{a_n}^1 b_n dt = b_n \left(1 - \frac{a_n}{2}\right)$$

Il suffit donc de prendre $a_n \leq 2(1 - 1/b_n)$ soit par exemple $a_n = 2/(n+1)$ avec le choix de b_n précédent. Avec ce choix, on a une suite d'éléments de A telle que $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc

$$d(0, A) = 1$$

11

(**)

Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans lui-même. On pose

$$F = \{x \in [0; 1], \quad f(x) = x\}$$

- (a). Montrer que F est non vide et fermé.
 (b). Réciproquement, on considère une partie A fermée et non vide de $[0; 1]$. Déterminer une fonction f continue de $[0; 1]$ dans lui-même pour laquelle $F = A$, F étant défini comme ci-dessus.

1. Pour montrer que F est fermée, il suffit de constater que c'est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $g : x \mapsto f(x) - x$. Pour s'assurer qu'il est ouvert, remarquons que l'application g précédente vérifie

$$g(0) = f(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(1) = g(1) - 1 \leq 0$$

Le théorème des valeurs intermédiaires prouve alors que g s'annule au moins une fois sur $[0; 1]$, ce qui prouve le résultat.

L'ensemble F est fermé et non vide.

2. Fixons $a \in A$ arbitraire (son existence est assurée car A est non vide), puis posons

$$f : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x + d(x, A) & \text{si } x \leq a \\ x - d(x, A) & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifions que f convient :

- L'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue (car 1-lipschitzienne, preuve classique) donc f est continue sur $[0; a[$ et $]a; 1]$ par théorèmes généraux, puis en a car les limites à gauche et à droite en ce point sont égales à a).
- Soit $x \in [0; 1]$. Par définition, $f(x) = 0$ si et seulement si $d(x, A) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} d(x, A) = 0 &\iff \forall r > 0, \exists y \in A, \quad |x - y| \leq r \\ &\iff \forall r > 0, \quad B_{x,r} \cap A \neq \emptyset \\ d(x, A) = 0 &\iff A \in \overline{A} \end{aligned}$$

Puisque A est fermé, on en déduit que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x appartient à A . On déduit que $F = A$ pour l'application f .

- Il reste à vérifier que f est bien à valeurs dans $[0; 1]$. On distingue deux cas :
 - Si $x \in [0; a]$, alors puisque a appartient à A ,

$$0 \leq x \leq x + d(x, A) \leq x + |x - a| = x + (a - x) = a \leq 1$$

- Si $x \in [a; 1]$, cette fois

$$1 \geq x \geq x - d(x, A) \geq x - |x - a| = x - (x - a) = a \geq 0$$

Dans les deux cas, on a bien $f(x) \in [0; 1]$.

Finalement,

Si A est une partie fermée non vide de $[0; 1]$, il existe une fonction continue de $[0; 1]$ dans lui-même dont A est l'ensemble des points fixes.

12

(**)

Centrale MP 2012

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note X l'ensemble des matrices semblables à A . Montrer que X est borné si et seulement si A est une matrice d'homothétie.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Notons que si A est une matrice d'homothétie, alors clairement X est réduit à $\{A\}$, donc est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etudions la réciproque.

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'ensemble X des matrices semblables à A soit borné. Considérons alors $\rho > 0$ et notons D la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \rho^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{d'inverse} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \rho^{-(n-1)} \end{pmatrix}$$

Un calcul matriciel élémentaire montre que pour tous $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$,

$$(D^{-1}AD)_{i,j} = \rho^{j-i} \cdot A_{i,j}$$

En particulier, si $A_{i,j} \neq 0$ et $i > j$

$$|(D^{-1}AD)_{i,j}| \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} +\infty$$

et si $A_{i,j} \neq 0$ et $i < j$

$$|(D^{-1}AD)_{i,j}| \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} +\infty$$

Puisque D est semblable à A , cela contredit le caractère borné de X , sauf si $A_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. La matrice A est donc nécessairement diagonale. Mais comme le raisonnement précédent peut s'appliquer à tout élément de X , on en déduit que tout élément de X est également une matrice diagonale.

Fixons maintenant $i \neq j$ arbitraires dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ et notons P la matrice de dilatation $I_n + E_{i,j}$, inversible d'inverse $I_n - E_{i,j}$. Un nouveau calcul matriciel élémentaire montre que

$$(P^{-1}AP)_{i,j} = A_{i,i} - A_{j,j}$$

Puisque cette matrice appartient à X , elle est donc diagonale, ce qui impose l'égalité $A_{i,i} = A_{j,j}$. Les indices i et j ayant été pris arbitraires, A est une matrice d'homothétie.

L'ensemble des matrices semblables à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est borné si et seulement si A est une matrice d'homothétie.

13

(*)

Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 et $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et non constante.

- (a). Montrer que f est bornée sur $\mathbb{U}$ et qu'elle atteint sa borne supérieure M et sa borne inférieure m .
- (b). Justifier que f prend au moins deux fois toute valeur $y \in]m; M[$.

- (a). L'ensemble $\mathbb{U}$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$ et fermé (car image réciproque de $\{1\}$ par le module qui est une application continue) donc compacte. On en déduit aussitôt que

f est bornée sur $\mathbb{U}$ et elle atteint ses bornes supérieures et inférieures.

- (b). Notons α et β deux réels tels que $m = f(e^{i\alpha})$ et $M = f(e^{i\beta})$. Par 2π -périodicité de $t \mapsto e^{it}$, on peut alors supposer sans perdre de généralité que $\beta \in [\alpha; \alpha + 2\pi[$. On a même $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$ car f n'est pas constante donc $m \neq M$. Notons alors

$$\varphi : \begin{cases} [\alpha; \alpha + 2\pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \mapsto f(e^{i\theta}) \end{cases}$$

Soit $\lambda \in]m; M[$. La fonction φ étant continue par composition, on peut s'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre α et β , puis entre β et $\alpha + 2\pi$ pour trouver deux réels θ_1 et θ_2 appartenant respectivement à $]\alpha; \beta[$ et $]\beta; \alpha + 2\pi[$ tel que $\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2)$. Les complexes $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ sont alors deux antécédents distincts de λ par f . Par suite,

f prend au moins deux fois toute valeur $y \in]m; M[$.

14

(*)

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \rightarrow F$ une application continue et surjective, et A une partie de E . On suppose que $\overline{A} = E$. Montrer que $\overline{f(A)} = F$.

Soit $y \in F$. Montrons que $y \in \overline{f(A)}$.

- Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$;
- Puisque A est dense dans E , il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x ;
- Puisque f est continue, alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, c'est-à-dire y .

Il suffit donc de prendre $b_n = f(x_n)$ pour tout n pour obtenir une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $f(A)$ qui converge vers y . Puisque y a été choisi quelconque,

$$\boxed{f(A) = F}$$

15

(*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (i) l'image réciproque de tout fermé borné est un fermé borné ;
- (ii) la fonction $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$.

On procède par double implication.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Alors, $[-M; M]$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ donc $f^{-1}([-M; M])$ également par (i). Soit donc $R \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$f^{-1}([-M; M]) \subset B_{0,R} = [-R; R]$$

En particulier, cela implique que pour tout réel x ,

$$|x| > R \implies x \notin f^{-1}([-M; M]) \implies f(x) \notin [-M; M] \implies |f(x)| > M$$

L'existence de R étant obtenue avec M arbitraire dans $\mathbb{R}_+$, cela signifie bien que $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit F un fermé borné de $\mathbb{R}$. Puisque F est fermé et que f est continue, alors $f^{-1}(F)$ est un fermé. Montrons qu'il est aussi borné. Par hypothèse, il est borné donc il existe $R > 0$ tel que $F \subset [-R; R]$. Mais d'après (ii),

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| > M \implies |f(x)| > R$$

En d'autres termes, $f^{-1}([-R; R])$ est inclus dans $[-M; M]$, ce qui prouve son caractère borné.

Les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes.

16

(*)

Soit K une partie compacte (c'est-à-dire fermée et bornée) d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que f est une application de K dans K faiblement contractante

$$\forall x \neq y \in K, \quad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \quad (\star)$$

Montrer que f a un unique point fixe.

Si x_1 et x_2 sont deux points fixes de f , alors d'après $(\star)$,

$$\|x_1 - x_2\| = \|f(x_1) - f(x_2)\| < \|x_1 - x_2\|$$

ce qui est absurde. f admet donc au plus un point fixe. Reste à justifier son existence. Notons

$$\begin{aligned} \varphi : K &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|f(x) - x\| \end{aligned}$$

Cette application est continue car 2-lipschitzienne. En effet, pour tous x, y dans K

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= |||f(x) - x| - |f(y) - y||| \\ &\leq |(f(x) - x) - (f(y) - y)| \\ &\leq \|f(x) - f(y)\| + \|x - y\| \\ |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq 2\|x - y\| \end{aligned}$$

Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur K , en particulier sa borne inférieure. Soit donc x_0 tel que $\varphi(x_0)$ soit minimal. Si x_0 et $f(x_0)$ sont distincts, alors d'après $(\star)$

$$\|f(x_0) - f(f(x_0))\| < \|f(x_0) - x_0\| \quad \text{soit} \quad \varphi(f(x_0)) < \varphi(x_0)$$

ce qui contredit la minimalité de $\varphi(x_0)$. Par conséquent, $x_0 = f(x_0)$ ce qui prouve que

L'application f admet un unique point fixe sur K .

17

(**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et f un élément de $\mathcal{L}(E)$. On suppose que $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ et on pose $g = \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k$. Montrer que g est la projection sur $\text{Ker}(f - I_d)$ parallèlement à $\text{Im}(f - I_d)$.

Puisque E est de dimension finie, il en est de même de $\mathcal{L}(E)$. La composition est alors bilinéaire donc continue. Notons g la limite de $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Alors,

$$f^{2k} = f^k \circ f^k \quad \text{et} \quad f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$$

Par passage à la limite, il vient $g^2 = g$ et $g \circ f = f \circ g = g$

Cette égalité prouve que g est un projecteur, qui commute avec f . De plus, $g \circ (f - I_d) = 0$ et $(f - I_d) \circ g = 0$, ce qui prouve les inclusions

$$\text{Im}(f - I_d) \subset \text{Ker } g \quad \text{et} \quad \text{Im } g \subset \text{Ker}(f - I_d)$$

Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(f - I_d)$. Alors $f(x) = x$ puis $f^k(x) = x$ par récurrence immédiate et enfin $g(x) = x$ par passage à la limite (ce qui utilise la continuité par linéarité de $h \mapsto h(x)$). Cela justifie que $x \in \text{Im } g$. On donc l'égalité $\text{Im } g = \text{Ker}(f - I_d)$, et l'autre s'en déduit par inclusion et un argument de dimension, via le théorème du rang. Pour conclure,

$$\text{Im}(f - I_d) = \text{Ker } g \quad \text{et} \quad \text{Im } g = \text{Ker}(f - I_d)$$

g est le projecteur sur $\text{Ker}(f - I_d)$ parallèlement à $\text{Im}(f - I_d)$.

18

(**)

ENS PC 2001

- (a). Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$. Même chose avec le complémentaire d'une boule fermée.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- (b). Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $F^{-1}(\{c\})$ soit un singleton. Que peut-on dire de c ?
 (c). On suppose que il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F^{-1}(\{c\})$ est un fermé borné non vide. Montrer que F admet un extremum.
 (d). Les résultats sont-ils conservés pour une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- (a). Graphiquement, une partie U est connexe par arcs si on peut trouver un chemin continu de x vers y dans U pour tous points x et y . Dans les deux cas de l'énoncé, la propriété est évidente. On peut toujours se déplacer d'un point à un autre dans $\mathbb{R}^2$ en évitant un troisième point, ou même une boule centrée en 0 si les deux points sont à l'extérieur de boule : il suffit de contourner la zone à éviter.

D'un point de vue purement analytique, il suffit de poser dans le premier cas :

- (a) $\varphi : t \mapsto tx + (1-t)y$ si x, y et c ne sont pas alignés dans $\mathbb{R}^2$; le trajet parcouru est alors le segment $[x; y]$ qui ne contient pas c ;
 (b) $\varphi : t \mapsto (x+y)/2 + \cos(\pi t)(x-y)/2 + \sin(\pi t)h$ où h est un vecteur orthogonal à $x+y$ s'ils sont alignés ; le trajet parcouru est alors un arc de cercle de centre le milieu de x et y et passant par x et y (il ne contient aucun point alignés avec x et y et donc pas c).

Dans le second, le plus simple est de passer en affixe complexe, de choisir $\varphi : t \mapsto r(t)\exp(i\theta(t))$ avec $r : t \mapsto tr_1 + (1-t)r_2$ et $\theta : t \mapsto t\theta_1 + (1-t)\theta_2$ où x est d'affixe $r_1\exp(i\theta_1)$ et y d'affixe $r_2\exp(i\theta_2)$.

- (b). Justifions que c est un extremum global de F . On raisonne pour cela par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ et $y \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$F(x) < c \quad \text{et} \quad F(y) > c$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $F^{-1}(\{c\}) = \{x_0\}$. Soit $\varphi : [0; 1]$ dans $\mathbb{R}^2$ continue telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$ quelconque du moment que $x_0 \notin \varphi([0; 1])$. L'existence d'un tel φ découle de la première question. Notons $g = F \circ \varphi$. Alors,

$$g(0) = F(x) < c \quad \text{et} \quad g(1) = F(y) > c$$

Puisque g est continue, cela implique qu'il existe $t_0 \in [0; 1]$ tel que $g(t_0) = c$. Alors $z = \varphi(t_0)$ appartient à $F^{-1}(\{c\})$ et est distinct de x_0 car $x_0 \notin \varphi([0; 1])$, ce qui est absurde. Par conséquent, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad F(x) \leq c \quad \text{ou} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad F(x) \geq c$$

En d'autres termes,

Le réel c est un extremum global de F .

- (c). Notons $K = F^{-1}(\{c\})$. Puisque K est borné, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $K \subset \overline{B}_{0,M}$. Soit alors $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|a\| > M$. Alors, $a \notin F$ donc $F(a) \neq c$. Supposons par exemple que $F(a) > c$ et montrons que F admet un minimum global. On sait que $\overline{B}_{0,M}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ donc F est bornée et atteint sa borne inférieure sur cet ensemble. Notons m_0 ce minimum et x_0 un point en lequel il est atteint. Alors, par définition,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\| \leq M \implies f(x) \geq m_0$$

Notons que K est non vide et inclus dans $\overline{B}_{0,M}$ donc il existe $y \in \overline{B}_{0,M}$ tel que $F(y) = c$ et donc $c \geq m_0$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| > M$. Grâce à nouveau à la première question, on peut trouver $\varphi : [0; 1]$ dans $\mathbb{R}^2$ continue telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = a$ avec $\varphi([0; 1]) \cap \overline{B}_{0,M} = \emptyset$ et poser $g = F \circ \varphi$. Par construction, $g(t) \neq c$ pour tout $t \in [0; 1]$. Mais puisque $g(1) = F(a) > c$, on a par continuité $g(0) = F(x) > c$ également. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\| > M \implies f(x) > c \geq m_0$$

Par conséquent, F admet bien m_0 pour minimum global. Le cas $F(a) < c$ est similaire et on conclut alors que F admet un maximum global. Dans tous les cas,

La fonction F admet un extremum global.

- (d). La réponse est non comme le montre l'exemple de la fonction $F = \arctan$. Elle est bijective strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2; \pi/2[$ donc pour tout $c \in [-\pi/2; \pi/2]$, $F^{-1}(\{c\})$ est un singleton **donc** un fermé borné, sans que c soit un extremum global, ni que F n'en admette un.

19 _____ (**) _____ **X-ENS PSI 2014**

On considère une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de taille $n \geq 3$ dont les coefficients sont tous strictement positifs et telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$$

On note $d = \min \{m_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n\}$. Si Z est une matrice colonne de $\mathbb{R}^n$, on note $\min(Z)$ (resp. $\max(Z)$) le minimum (resp. maximum) de ses coordonnées.

- (a). Montrer que $d \leq 1/n$.
 (b). Justifier que si Y est une colonne dont les coordonnées sont positives, alors $\min(MY) \geq d \max(Y)$.
 (c). Montrer que pour toute colonne Y , on a

$$\min(MY) \geq d \max(Y) + (1 - d) \min(Y)$$

On pourra se ramener à la question précédente à l'aide du vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1.

- (d). En déduire que pour toute colonne Y , on a

$$\max(MY) - \min(MY) \leq (1 - 2d) (\max(Y) - \min(Y))$$

- (e). On fixe une colonne Z et on considère la suite définie par

$$U_0 = Z \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad U_{m+1} = M \cdot U_m$$

Montrer que la suite $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge.

- (f). En déduire que la suite $(M^m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de rang 1.

- (a). Par hypothèse,
$$\sum_{j=1}^n m_{1,j} = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad m_{1,j} \geq d$$

Ainsi, $nd \leq 1$ soit

$$d \leq 1/n$$

- (b). Fixons $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Alors, puisque tous les coefficients de M et Y sont positifs,

$$(MY)_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} Y_j \geq \sum_{j=1}^n d Y_j \geq d \max(Y)$$

L'inégalité étant valable pour tout i , elle est valable en particulier pour l'indice i en lequel $\min(MY)$ est atteint et donc

$$\min(MY) \geq d \max(Y)$$

- (c). Notons J le vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1, et $Z = Y - \min(Y) \cdot J$. Par construction, Z est à coefficients positifs ou nuls, et d'après la question précédente,

$$\min(MZ) \geq d \max(Z) \quad \text{soit} \quad \min(MY - \min(Y) \cdot MJ) \geq d \max(Y - \min(Y) \cdot J)$$

Par hypothèse sur M ,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad (MJ)_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} \cdot 1 = 1 \quad \text{d'où} \quad MJ = J$$

On peut alors remarquer que pour tout vecteur colonne A et tout scalaire k ,

$$\min(A - k \cdot J) = \min(A) - k \quad \text{et} \quad \max(A - k \cdot J) = \max(A) - k$$

Il s'ensuit que

$$\min(MY) - \min(Y) \geq d(\max(Y) - \min(Y))$$

soit bien

$$\boxed{\min(MY) \geq d \max(Y) + (1 - d) \min(Y)}$$

- (d). On peut remarquer que pour tout vecteur colonne A ,

$$\min(-A) = -\max(A) \quad \text{et} \quad \max(-A) = -\min(A)$$

Appliquons le résultat du (c) au vecteur colonne $-Y$. D'après la remarque précédente, il vient

$$-\max(MY) \geq -d \min(Y) - (1 - d) \max(Y) \quad \text{soit} \quad \max(MY) \leq d \min(Y) + (1 - d) \max(Y)$$

Mais toujours d'après le (c), on a également

$$-\min(MY) \leq -d \max(Y) - (1 - d) \min(Y)$$

Il ne reste plus qu'à additionner ces deux inégalités.

$$\boxed{\max(MY) - \min(MY) \leq (1 - 2d) (\max(Y) - \min(Y))}$$

- (e). Pour tout entier m , on note $\alpha_m = \max(U_m)$ et $\beta_m = \min(U_m)$

Par définition, on a clairement $\alpha_m \geq \beta_m$. De plus, la question (d) prouve que

$$\alpha_{m+1} - \beta_{m+1} \leq (1 - 2d)(\alpha_m - \beta_m)$$

donc par récurrence immédiate,

$$0 \leq \alpha_m - \beta_m \leq (1 - 2d)^m (\alpha_0 - \beta_0) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{car } (1 - 2d) \in]0; 1[)$$

Il ne reste plus qu'à justifier la monotonie des suites pour reconnaître des suites adjacentes. Or, pour tout vecteur colonne A et tout indice i ,

$$(MA)_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} A_j \leq \sum_{j=1}^n m_{i,j} \max(A) = \max(A)$$

ceci étant vrai pour tout entier i , on a notamment

$$\max(MA) \leq \max(A) \quad \text{et notamment} \quad \max(U_{m+1}) \leq \max(U_m)$$

La suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante, et on justifie de manière similaire la croissance de $(\beta_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Les suites sont donc adjacentes, et en particulier, elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Sachant que par définition,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \beta_m \leq (U_m)_i \leq \alpha_m$$

on en déduit par encadrement que toutes les coordonnées de U_m convergent vers la même limite ℓ . En d'autres termes,

$$\boxed{\text{La suite } (U_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un élément de } \text{Vect} \{ {}^t(1, 1, \dots, 1) \}.$$

- (f). Fixons $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et notons E_j le j -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La j -ième colonne de M^m est donnée par $M^m \cdot E_j$. Le résultat de la question précédente prouve que ce vecteur converge vers un élément de $\text{Vect} \{ {}^t(1, 1, \dots, 1) \}$. Ceci étant vrai pour tout entier j , on en déduit que $(M^m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice dont toutes les colonnes appartiennent à la droite engendrée par ${}^t(1, 1, \dots, 1)$. En particulier,

$$\boxed{\text{La suite } (M^m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge vers une matrice de rang 1.}}$$

20

(**)

Mines PC 2016

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique. On note

$$G_f = \{T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$$

- On suppose f continue. Montrer que G_f est un fermé.
- Donner un exemple de fonction pour laquelle $G_f = \mathbb{Q}$.
- Soit f une fonction telle que 1 et $\sqrt{2}$ soient tous deux des éléments de G_f . Montrer que l'équation $f(x) = f(0)$ possède une infinité de solutions dans $]0; \pi/2[$.

- Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G_f convergente vers une limite T_∞ . Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (que l'on fixe), et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n \in G_f \quad \text{donc} \quad f(x + T_n) = f(x)$$

La suite $(x + T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x + T_\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, il vient en passant à la limite

$$f(x + T_\infty) = f(x)$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, cela signifie que $T_\infty \in G_f$. La caractérisation séquentielle des fermés assure que

L'ensemble G_f est un fermé de $\mathbb{R}$.

- A noter qu'on ne suppose plus f continue ici. L'exemple est classique, il suffit de prendre la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si q est un élément de $\mathbb{Q}$, alors $x + q$ est rationnel si et seulement si x l'est. Par suite, $f(x + q) = f(x)$ et $q \in G_f$. Si r est un irrationnel, alors en particulier $f(0) = 1$ et $f(r) = 0$ donc $f(0) \neq f(0 + r)$ et $r \notin G_f$. Cela prouve que $G_f = \mathbb{Q}$.

Si f est la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, alors $G_f = \mathbb{Q}$.

- Il est clair que G_f est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il contient 0, est stable par addition et passage à l'opposé. Notons

$$A = \{p + q\sqrt{2}, p, q \in \mathbb{Z}\}$$

Puisque 1 et $\sqrt{2}$ sont des périodes de G_f , il en est de même de tout élément de A . Par suite, $f(0) = f(a)$ pour tout $a \in A$. Il suffit donc de montrer que l'intervalle $]0; \pi/2[$ contient une infinité d'éléments de A . On se sert pour cela de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}]$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x . Par définition, il est clair que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A \cap]0; 1[$ donc en particulier dans $]0; \pi/2[$. De plus, ses éléments sont deux à deux distincts, puisque s'il existe p et q distincts tels que $a_p = a_q$, alors

$$p\sqrt{2} - [p\sqrt{2}] = q\sqrt{2} - [q\sqrt{2}] \quad \text{d'où} \quad \sqrt{2} = \frac{[q\sqrt{2}] - [p\sqrt{2}]}{p - q}$$

ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{2}$. L'ensemble $\{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est donc infini et à valeurs dans $A \cap]0; 1[$. En particulier, puisque $f(a_n) = f(0)$ pour tout entier n ,

L'équation $f(x) = f(0)$ admet une infinité de solutions dans $]0; \pi/2[$.

Remarque : On peut en réalité montrer que l'ensemble A est dense dans $\mathbb{R}$. Cela implique notamment que n'importe quel intervalle $]a; b[$ de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'éléments de A et donc une infinité de solutions de l'équation $f(x) = f(0)$ d'inconnue x . Si l'on ajoute à cela l'hypothèse que f est continue, on en déduit aussitôt que f est nécessairement constante.

21

(***)

X PC 2016

Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}_+$ non borné tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $U \cap (x\mathbb{N})$ est fini.

(ii) Il existe $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ mais telle que f n'ait pas de limite en $+\infty$.

On raisonne par double implication.

$\Leftarrow$ Puisque f n'a pas de limite en $+\infty$, en particulier elle ne tend pas vers 0 en $+\infty$ (ce qui serait de toute façon la seule limite possible compte tenu de l'autre hypothèse). Par définition,

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}, \quad \exists x \geq X, \quad |f(x)| > \epsilon \quad (\star)$$

Posons dans ce cas

$$U = f^{-1}(-\epsilon; -\epsilon \cup \epsilon; +\infty)$$

L'ensemble U est ouvert comme image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue. Justifions que U vérifie les propriétés souhaitées.

- La propriété $(\star)$ se réécrit alors $\forall X \in \mathbb{R}, \quad \exists x \geq X, \quad x \in U$

ce qui prouve que U n'est pas bornée.

- Fixons $x > 0$. D'après (ii), puisque $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |f(nx)| \leq \epsilon \quad \text{soit} \quad nx \notin U$$

En particulier, $U \cap x\mathbb{N}$ est fini puisqu'inclus dans $\{0, x, 2x, \dots, (N-1)x\}$.

On a donc bien démontré que (ii) implique (i).

$\Rightarrow$ Supposons (i) vérifiée. Commençons par considérer $g : x \mapsto d(x, \bar{U})$ qui à x associe sa distance au complémentaire de U . Pour tout $x > 0$, sachant que $U \cap x\mathbb{N}$ est un ensemble fini, on peut introduire

$$N = \max \{k \in \mathbb{N}, kx \in U\}$$

et en particulier $\forall p > N, \quad px \notin U \quad \text{d'où} \quad px \in \bar{U} \quad \text{et} \quad g(px) = d(px, \bar{U}) = 0$

La suite $(g(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc nulle à partir d'un certain rang, donc est notamment convergente de limite nulle.

Cette fonction n'a cependant aucune raison de ne pas avoir de limite en $+\infty$, on va donc légèrement la modifier pour cela. Par hypothèse, U est non borné donc il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de U , que l'on peut supposer strictement croissante, de limite $+\infty$. On construit alors une fonction h , affine par morceaux telle que

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad h(x_n) = \frac{1}{g(x_n)}$$

Il suffit alors de poser $f = g \cdot h$. Par construction, pour tout $x > 0$, on a toujours $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang donc convergente. Mais cette fois, on a de plus $f(x_n) = 1$ pour tout entier n avec $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui montre que f n'admet pas 0 pour limite en $+\infty$, donc pas de limite du tout en $+\infty$. On a donc bien justifié la propriété (ii).

On peut donc conclure

Les propositions (i) et (ii) sont équivalentes.

Remarque : Cet énoncé est franchement inhabituel puisqu'il demande d'établir l'équivalence entre deux énoncés, mais chercher à vérifier si ces deux là sont simultanément vrais ou simultanément faux ! En l'occurrence, ils sont faux tous les deux. L'absurdité de la proposition (ii) est un résultat qui porte le nom de *lemme de Croft*. La preuve passe par la notion d'espace complet et le résultat suivant :

Théorème de Baire : Si (E, d) est un espace métrique complet et $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E (resp. $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide), alors $\cap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ reste une partie dense de E (resp. $\cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ reste d'intérieur vide).

Ce théorème n'a jamais été au programme des classes préparatoires, mais il restait largement accessibles à de bons élèves à l'époque où la notion d'espace complet faisait encore partie du programme de MP. Les plus curieux peuvent venir en discuter avec moi à tout moment.