

Épreuve : MATHÉMATIQUES I

Option M, Pⁱ

On admet que la suite de terme général

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \geq 1,$$

a une limite finie notée γ ("constante d'Euler"), à l'aide de laquelle on se propose de calculer certaines intégrales.

Partie I -

On appelle E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions à valeurs réelles définies sur $] -1, +\infty[$.

I.A -

I.A.1) Montrer que, si une fonction f de E possède les deux propriétés :

$$\forall x > -1 \quad f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (1)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0, \quad (2)$$

alors

$$\forall x > -1 \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln n - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \dots - \frac{1}{x+n} \right) \quad (3)$$

et

$$\forall x > -1 \quad f(x) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \quad (4)$$

I.A.2) Inversement, montrer que l'égalité (4) permet de définir sur $] -1, +\infty[$ une fonction f qui vérifie (1). Calculer $f(0)$ et $f(-1/2)$ à l'aide de γ .

I.A.3) Montrer que la fonction f précédente est monotone et vérifie (2) (on pourra introduire, pour $x \geq 1$, la partie entière k de x). Quelles sont les limites de f lorsque x tend respectivement vers -1 et vers $+\infty$?

I.A.4) Montrer que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $] -1, +\infty[$.

I.B - En s'inspirant de la question I.A - montrer qu'il existe une fonction unique g de E qui possède les propriétés :

$$\forall x > -1 \quad g(x+1) - g(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (5)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad (6)$$

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $g(0)$ et $g(-1/2)$. Quelle relation y-a-t-il entre f et g ?

Partie II -

II.A - x désignant un nombre réel, on pose :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt, \quad B(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \ln t dt, \quad C(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x (\ln t)^2 dt. \quad (7)$$

II.A.1) Pour quelles valeurs de x , les intégrales $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ convergent-elles ?

II.A.2) On pose alors : $\psi(x) = B(x)/A(x)$, $\chi(x) = C(x)/A(x)$ et $\eta(x) = \chi(x) - \psi^2(x)$. Quel est le signe de $\eta(x)$?

II.B -

II.B.1) Vérifier que, $\forall x > -1$ $A(x+1) = (x+1)A(x)$.

II.B.2) Trouver une relation entre $B(x+1)$, $B(x)$ et $A(x)$ et en déduire que ψ vérifie (1).

II.B.3) Trouver une relation entre $C(x+1)$, $C(x)$ et $B(x)$ et en déduire que η vérifie (5).