

I. PRÉLIMINAIRES

1 Pour établir la première inégalité, introduisons la fonction

$$\alpha: \begin{cases}]-1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t - \ln(1+t) \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur $] -1; +\infty[$ (en tant que somme de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle) et

$$\forall t \in]-1; +\infty[\quad \alpha'(t) = 1 - \frac{1}{1+t}$$

Pour tout $t \in]-1; 0]$, on a $\alpha'(t) \leq 0$ et, pour tout $t \in [0; +\infty[$, on a $\alpha'(t) \geq 0$. Par conséquent, la fonction α est décroissante sur l'intervalle $] -1; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Résumons ceci dans un tableau de variations.

		-1	0	$+\infty$
α'			-	+
α		$+\infty$	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$

On constate que la fonction α admet pour minimum global le réel $\alpha(0) = 0$. On en déduit que pour tout t de l'intervalle $] -1; +\infty[$, $\alpha(t) \geq 0$, d'où

$$\boxed{\forall t \in]-1; \infty[\quad \ln(1+t) \leq t} \quad (1)$$

Pour établir cette inégalité, on peut également utiliser le fait que la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est concave. Son graphe est situé en dessous de toutes ses tangentes, donc en particulier en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, ce qui fournit le résultat.

Pour mettre en évidence la seconde inégalité, posons

$$\beta: \begin{cases}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t \ln t \end{cases}$$

Cette fonction est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ (en tant que produit de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle) et

$$\forall t \in]0; +\infty[\quad \beta'(t) = \ln t + 1$$

Pour tout $t \in]0; e^{-1}]$, on a $\beta'(t) \leq 0$ et, pour tout $t \in [e^{-1}; +\infty[$, on a $\beta'(t) \geq 0$. Ainsi, la fonction β est décroissante sur l'intervalle $]0; e^{-1}]$ et croissante sur l'intervalle $[e^{-1}; +\infty[$. Consignons ceci dans un tableau de variations.

	0	e^{-1}	$+\infty$
β'	—	—	+
β	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

L'étude des variations de β montre que cette fonction admet pour minimum global le réel $\beta(e^{-1}) = -e^{-1}$. Il en résulte que

$$\forall t \in]0; +\infty[\quad t \ln t \geq -\frac{1}{e} \quad (2)$$

2 Une bijection ψ de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de I sur J si et seulement si, pour tout élément t de I ,

$$\psi'(t) \neq 0$$

Dans ce cas, la dérivée de ψ^{-1} est donnée par

$$(\psi^{-1})' = \frac{1}{\psi' \circ \psi^{-1}}$$

On dispose en fait du résultat plus général suivant : une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 1$, sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de I sur son image $J = \psi(I)$ si et seulement si, pour tout élément t de I , le réel $\psi'(t)$ est non nul. Si tel est le cas, on a soit $\psi'(t) > 0$, pour tout $t \in I$, et le difféomorphisme ψ est strictement croissant, soit $\psi'(t) < 0$, pour tout $t \in I$, et le difféomorphisme ψ est strictement décroissant.

II. CONSTRUCTION D'UNE APPLICATION PARTICULIÈRE

3 Commençons par montrer que, pour tout $f \in H$, la fonction $u \mapsto f(u)e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie la définition de l'ensemble H_0 . Prenons une fonction f de H . Par définition de ce dernier ensemble,

$$\exists \rho > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad 0 < f(u) \leq \frac{1}{\rho} \exp \left(\left(\frac{1}{2} - \rho \right) u^2 \right)$$

On a donc, pour tout réel u , l'encadrement

$$0 < f(u)e^{-u^2/2} \leq \frac{1}{\rho} e^{-\rho u^2} \quad (3)$$

La fonction $g : u \mapsto \frac{1}{\rho} e^{-\rho u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $u \mapsto 1/u^2$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$. Cette dernière fonction est intégrable au voisinage de l'infini. Par conséquent, g est intégrable sur $\mathbb{R}$. De surcroît, comme f appartient à H , elle est continue sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction $u \mapsto f(u)e^{-u^2/2}$ est également continue sur $\mathbb{R}$. L'encadrement (3) et l'intégrabilité de g assurent alors qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$,

Donnons une autre façon de prouver que g est intégrable. L'énoncé admet l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $v \mapsto e^{-v^2/2}$ (puisqu'il est même rappelé que son intégrale vaut $\sqrt{2\pi}$). On en déduit alors l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}$, grâce au changement de variable $v = \sqrt{2\rho}u$.

Prenons maintenant f dans l'ensemble H_0 . Alors f appartient à H . D'après ce qui précède, la fonction $u \mapsto f(u)e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle $]-\infty; x]$, pour tout réel x , ce qui justifie la définition de la fonction F_f . La continuité de l'application $u \mapsto f(u)e^{-u^2/2}$ implique en outre que F_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'_f(x) = f(x)e^{-x^2/2}$$

Sachant qu'elle appartient à H , la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout réel x , $F'_f(x) > 0$. Il en résulte que F_f est strictement croissante. Comme cette fonction est en outre continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image qui est l'intervalle

$$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} F_f ; \lim_{x \rightarrow +\infty} F_f \right[$$

D'après le résultat de la question 2, F_f est même un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur son image. Il ne reste plus qu'à déterminer les limites intervenant dans l'expression de l'image de F_f . D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_f(x) = 0$$

et, d'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$ car $f \in H_0$

On en déduit que l'image de l'application F_f est l'intervalle $]0; \sqrt{2\pi}[$. On vient donc de prouver que

$$F_f \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme strictement croissant de } \mathbb{R} \text{ sur }]0; \sqrt{2\pi}[.$$

Remarquons que la fonction constante égale à 1 vérifie la condition d'appartenance à l'ensemble H , pour $\rho = 1/2$. En outre, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$$

ce qui implique que 1 appartient à H_0 . En remplaçant f par 1 dans ce qui précède, on peut donc licitement considérer le $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme strictement croissant

$$F_1: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow]0; \sqrt{2\pi}[\\ x \longmapsto \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \end{cases}$$

4 Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La condition sur φ requise dans l'énoncé, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

est équivalente à

$$F_f \circ \varphi = F_1$$

De plus, d'après la question précédente, la fonction F_f est inversible et sa réciproque F_f^{-1} définit une application de $]0; \sqrt{2\pi}[$ dans $\mathbb{R}$. La relation fonctionnelle précédemment écrite est donc équivalente à

$$\varphi = F_f^{-1} \circ F_1$$

Ainsi, il existe une unique fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition de l'énoncé.

Celle-ci est donnée par

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto F_f^{-1} \circ F_1(x) \end{cases}$$

5 Le résultat de la question 3 assure que l'application F_f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $]0; \sqrt{2\pi}[$. En conséquence, sa réciproque F_f^{-1} est également un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme strictement croissant, de $]0; \sqrt{2\pi}[$ sur $\mathbb{R}$.

D'après sa définition, la fonction φ apparaît comme la composée de F_f^{-1} et de F_1 . Ces deux applications sont des $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme strictement croissants, la première de $\mathbb{R}$ sur $]0; \sqrt{2\pi}[$, et la deuxième de $]0; \sqrt{2\pi}[$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\varphi \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme strictement croissant de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

6 Rappelons que $F_f \circ \varphi = F_1$, par définition de φ . Les fonctions F_f , F_1 et φ sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$, si bien que l'on peut dériver la relation précédente et ainsi écrire

$$\varphi' \cdot F_f' \circ \varphi = F_1'$$

En reprenant l'expression de la dérivée de F_f calculée à la question 3, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) f(\varphi(x)) e^{-\frac{\varphi(x)^2}{2}} = e^{-x^2/2} \quad (4)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f appartient à H , elle est strictement positive, ce qui implique que $f(\varphi(x)) > 0$. De surcroît, la fonction φ étant un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme strictement croissant, le réel $\varphi'(x)$ est strictement positif. En passant au logarithme dans la relation (4), on peut donc licitement écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2 = -\frac{x^2}{2}$$

Notons que le fait que $\varphi'(x)$ est strictement positif, pour tout réel x , peut aussi se démontrer en exprimant $\varphi'(x)$ comme produit de quantités strictement positives grâce à la relation (4). On a en effet

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = \frac{e^{\frac{\varphi(x)^2 - x^2}{2}}}{f(\varphi(x))}$$

Pour calculer la seconde expression donnée dans l'énoncé, procédons de même en remarquant que la définition de φ implique que $F_1 \circ \varphi^{-1} = F_f$. Dériver cette relation (ce qui est possible, étant donné que les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$) conduit à $(\varphi^{-1})' \cdot F_1' \circ \varphi^{-1} = F_f'$. En remplaçant F_f' et F_1' par leurs expressions respectives, on aboutit à

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi^{-1})'(x) e^{-\frac{(\varphi^{-1}(x))^2}{2}} = f(x) e^{-x^2/2}$$

Comme φ^{-1} est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme strictement croissant, pour tout réel x , il vient $(\varphi^{-1})'(x) > 0$. L'appartenance de f à H garantit que f est strictement positive. En prenant le logarithme dans la relation établie précédemment et en arrangeant les termes, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{1}{2}(\varphi^{-1}(x))^2 = -\frac{x^2}{2}$$

Formulons ici une remarque similaire à la précédente. On pourrait également arguer du fait que

$$(\varphi^{-1})'(x) = f(x) e^{\frac{(\varphi^{-1}(x))^2 - x^2}{2}}$$

dans le but d'affirmer que $(\varphi^{-1})'(x)$ est strictement positif, pour tout réel x .

7 La fonction $u \mapsto h(u) f(u) e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et la fonction φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Effectuons le changement de variable $u = \varphi(v)$. On en déduit l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$v \mapsto h(\varphi(v)) f(\varphi(v)) e^{-\frac{(\varphi(v))^2}{2}} \varphi'(v)$$

$$\text{puis} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) f(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(v)) f(\varphi(v)) e^{-\frac{(\varphi(v))^2}{2}} \varphi'(v) dv$$

La relation (4) permet d'en déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) f(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u)) e^{-u^2/2} du$$

8 La fonction φ étant une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, elle est positive et croissante sur l'intervalle $[A; +\infty[$, avec par exemple

$$A = \text{Max}(1, \varphi^{-1}(0)) > 0$$

Alors la fonction φ^2 est croissante sur $[A; +\infty[$, par composition, car $x \mapsto x^2$ croît sur $\mathbb{R}_+$. Prenons un réel x supérieur à A . φ^2 étant croissante sur l'intervalle $[x; x+1]$, on a

$$\forall u \in [x; x+1] \quad \varphi^2(u) \geq \varphi^2(x) \geq 0$$

De plus, l'application $v \mapsto e^{-v^2}$ étant décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$, on peut établir que

$$\forall u \in [x; x+1] \quad e^{-u^2/2} \geq e^{-(x+1)^2/2} \geq 0$$

Multiplions les deux séries d'inégalités précédentes. Comme les réels mis en jeu sont positifs, il vient

$$\forall u \in [x; x+1] \quad \varphi^2(u) e^{-u^2/2} \geq \varphi^2(x) e^{-(x+1)^2/2}$$

Il suffit d'intégrer cette inégalité sur $[x; x+1]$ par rapport à u pour obtenir

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u) e^{-u^2/2} du \geq \varphi^2(x) e^{-(x+1)^2/2}$$

On a donc prouvé le résultat suivant :

$\exists A > 0 \quad \forall x \geq A \quad \int_x^{x+1} \varphi^2(u) e^{-u^2/2} du \geq \varphi^2(x) e^{-(x+1)^2/2}$

9 L'assertion que l'énoncé demande d'établir est équivalente au fait qu'il existe un réel $B > 0$ tel que

$$\forall x \geq B \quad \varphi^2(x) e^{-(x+1)^2/2} \leq 1$$

et

$$\forall x \leq -B \quad \varphi^2(x) e^{-(x-1)^2/2} \leq 1$$

D'après la question précédente, pour majorer $\varphi^2(x) e^{-(x+1)^2/2}$ par 1 lorsque x est assez grand, il suffit de majorer par 1, lorsque x est assez grand, l'intégrale

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u) e^{-u^2/2} du$$

Pour majorer $\varphi^2(x) e^{-(x-1)^2/2}$ par 1, lorsque $-x$ est assez grand, en se ramenant de la même manière à la majoration d'une intégrale, établissons une inégalité similaire à celle obtenue à la question précédente. Comme φ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, il existe un réel $A' < 0$ tel que φ est croissante et négative sur l'intervalle $]-\infty; A']$. Alors, φ^2 est décroissante sur ce même intervalle. Soit $x \leq A'$.

$$\forall u \in [x-1; x] \quad \varphi^2(u) \geq \varphi^2(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad e^{-u^2/2} \geq e^{-(x-1)^2/2} \geq 0$$

En multipliant ces inégalités et en les intégrant sur l'intervalle $[x-1; x]$, on obtient

$$\int_{x-1}^x \varphi^2(u) e^{-u^2/2} du \geq \varphi^2(x) e^{-(x-1)^2/2}$$

Majorons maintenant par 1, pour $|x|$ assez grand, les intégrales intervenant dans l'inégalité obtenue à la question précédente et dans son analogue établi ci-dessus. Pour ceci, utilisons le résultat de la question 7 en prenant pour h la fonction $u \mapsto u^2$. Il s'agit bien d'une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. L'encadrement (3) tient toujours, puisque f appartient à H . On en déduit que

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad 0 \leq u^2 f(u) e^{-u^2/2} \leq \frac{1}{\rho} u^2 e^{-\rho u^2}$$

La fonction $u \mapsto \frac{1}{\rho} u^2 e^{-\rho u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $u \mapsto 1/u^2$ au voisinage de l'infini. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. L'encadrement précédent assure par conséquent que $u \mapsto u^2 f(u) e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que l'application $h : u \mapsto u^2$ vérifie les hypothèses du résultat de la question 7 qui permet d'affirmer que

La fonction $v \mapsto \varphi^2(v) e^{-v^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ceci garantit que les intégrales que l'on souhaite majorer tendent vers 0 quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$. On en déduit l'existence d'un réel $B > 0$, que l'on peut choisir supérieur à A et $-A'$ tel que

$$\forall x \geq B \quad \int_x^{x+1} \varphi^2(u) e^{-u^2/2} du \leq 1$$

et

$$\forall x \leq -B \quad \int_{x-1}^x \varphi^2(u) e^{-u^2/2} du \leq 1$$

D'après l'inégalité établie à la question précédente et son analogue donné précédemment, on a $\varphi^2(x) e^{-(x+1)^2/2} \leq 1$ pour tout $x \geq B$, et $\varphi^2(x) e^{-(x-1)^2/2} \leq 1$ pour tout $x \leq -B$. Finalement,

$$\exists B > 0 \quad \forall u \in]-\infty; -B] \cup [B; +\infty[\quad |\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}$$

10 Soit u un réel quelconque. Écrivons

$$(u \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2} = (1 - \varphi'(u)) e^{-u^2/2} + (u - \varphi(u)) (-u e^{-u^2/2})$$

ce qui permet de reconnaître la dérivée du produit de $u \mapsto u - \varphi(u)$ par $u \mapsto e^{-u^2/2}$. En conséquence,

La fonction $u \mapsto (u \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2}$ admet pour primitive $u \mapsto (u - \varphi(u)) e^{-u^2/2}$.

11 Soient x et y deux réels vérifiant $x \leq -B < B \leq y$. D'après la question précédente, on a l'égalité

$$\int_x^y \varphi'(u) e^{-u^2/2} du = - \left[(u - \varphi(u)) e^{-u^2/2} \right]_x^y + \int_x^y (u \varphi(u) - u^2 + 1) e^{-u^2/2} du$$

Montrons que l'intégrale constituant le membre de gauche ci-dessus admet une limite finie quand x tend vers $-\infty$ et y tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la fonction $u \mapsto \varphi'(u) e^{-u^2/2}$ est convergente. Grâce au résultat de la question 9, comme $y \geq B$, on peut écrire

$$\left| (y - \varphi(y)) e^{-y^2/2} \right| \leq y e^{-y^2/2} + e^{(y+1)^2/4} e^{-y^2/2}$$

Le majorant tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (y - \varphi(y)) e^{-y^2/2} = 0$$

On démontre de la même manière que la limite de $(x - \varphi(x)) e^{-x^2/2}$ quand x tend vers $-\infty$ est nulle. En outre, d'après la majoration obtenue à la question 9, la fonction

$$u \mapsto (u \varphi(u) - u^2 + 1) e^{-u^2/2}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, car elle est continue et négligeable au voisinage de l'infini devant $u \mapsto 1/u^2$. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est donc convergente. Il en résulte que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la fonction continue

$$u \mapsto \varphi'(u) e^{-u^2/2}$$

est convergente. Cette dernière fonction est positive, car l'application φ est un $\mathcal{C}^1$ -diffeomorphisme strictement croissant. On en déduit qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en tant que somme de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$,

La fonction $u \mapsto (u \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Calculons son intégrale I. En vertu de la question précédente, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \int_x^y (u \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2} du = \left[(u - \varphi(u)) e^{-u^2/2} \right]_x^y$$

Les deux limites étudiées précédemment permettent d'en déduire que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2} du = 0$$

Montrer que l'intégrale

$$\int_x^y (u \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2} du$$

tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ et y tend vers $+\infty$, permet d'affirmer directement que l'intégrale I est convergente et vaut 0. Cependant, il est précisé dans l'énoncé que l'intégrabilité des fonctions apparaissant dans les diverses intégrales doit être démontrée. Ceci explique le travail mené au début de la question.

III. UNE INÉGALITÉ INTÉRESSANTE

12 Commençons par prouver la convergence de l'intégrale définissant $E(f)$. Remarquons tout d'abord que l'intégrande $u \mapsto f(u) \ln(f(u)) e^{-u^2/2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, en vertu du fait que l'application f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Il s'agit alors de majorer convenablement la fonction positive

$$\theta : u \mapsto f(u) |\ln(f(u))| e^{-u^2/2}$$

Notons F l'ensemble des réels u tels que $f(u) \leq 1$. Soit $u \in F$. Comme $f(u) \leq 1$, on a, d'après la relation (2),

$$0 \leq f(u) |\ln(f(u))| = -f(u) \ln(f(u)) \leq \frac{1}{e}$$

d'où
$$0 \leq f(u) |\ln(f(u))| e^{-u^2/2} \leq \frac{1}{e} e^{-u^2/2}$$

et finalement
$$\forall u \in F \quad 0 \leq \theta(u) \leq \frac{1}{e} e^{-u^2/2}$$

Soit $u \in \mathbb{R} \setminus F$. Comme $f(u) > 1$, en prenant le logarithme dans la condition d'appartenance de f à l'ensemble H , on obtient

$$0 < \ln(f(u)) \leq \left(\frac{1}{2} - \rho \right) u^2 - \ln \rho$$

En combinant ceci avec l'encadrement (3), on peut écrire

$$0 < f(u) \ln(f(u)) e^{-u^2/2} \leq \frac{1}{\rho} \left(\left(\frac{1}{2} - \rho \right) u^2 - \ln \rho \right) e^{-\rho u^2}$$

puis
$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus F \quad 0 \leq \theta(u) \leq \frac{1}{\rho} \left| \left(\frac{1}{2} - \rho \right) u^2 - \ln \rho \right| e^{-\rho u^2}$$

Prenons un réel u . Utilisons les majorations de θ sur F et $\mathbb{R} \setminus F$:

$$\theta(u) \leq \text{Max} \left(\frac{1}{e} e^{-u^2/2}, \frac{1}{\rho} \left| \left(\frac{1}{2} - \rho \right) u^2 - \ln \rho \right| e^{-\rho u^2} \right)$$

En conséquence, θ est négligeable devant la fonction $u \mapsto 1/u^2$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, en tant que maximum de fonctions négligeables. Comme θ est en outre continue, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

la fonction $u \mapsto f(u) \ln(f(u)) e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

car sa valeur absolue θ l'est. Finalement,

L'intégrale définissant $E(f)$ est convergente.

Abordons maintenant la preuve de la convergence de l'intégrale définissant $\Phi(f)$. L'intégrande $u \mapsto |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}$ est une fonction continue et positive. De surcroît, cette fonction est majorée par

$$u \mapsto u^2 e^{-u^2/2} + 2|u| |\varphi(u)| e^{-u^2/2} + \varphi^2(u) e^{-u^2/2} \quad (5)$$

En faisant appel au résultat de la question 9 pour majorer la valeur absolue de φ , on peut remarquer que les deux premiers termes sont négligeables, au voisinage de

l'infini, devant $u \mapsto 1/u^2$ dont l'intégrale converge au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. On a prouvé à la question 9 que le troisième terme définit une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction définie en (5), qui est par ailleurs continue et positive, est intégrable sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que

La fonction $u \mapsto |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ceci permet de conclure que

L'intégrale définissant $\Phi(f)$ est convergente.

On peut prouver d'une autre manière ce dernier résultat. En effet, la fonction qui à u associe $ue^{-u^2/4}$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. On a prouvé à la question 9 que la fonction $u \mapsto \varphi(u)e^{-u^2/4}$ est aussi de carré intégrable. En faisant appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut en déduire que la différence des deux fonctions précitées est aussi de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui garantit la convergence de l'intégrale définissant $\Phi(f)$.

13 Posons, pour tout réel u , $h(u) = \ln(f(u))$. La fonction h ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$. En outre, on a vu à la question précédente que la fonction qui à u associe $h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut alors appliquer le résultat de la question 7. La fonction $u \mapsto h(\varphi(u))e^{-u^2/2}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

La fonction $u \mapsto \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Et, de surcroît, on dispose de l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2} du$$

puis

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2} du$$

14 D'après les deux questions précédentes, en tant que différence de fonctions intégrables, la fonction

$$u \mapsto \left(\ln(f(\varphi(u))) - \frac{1}{2} |u - \varphi(u)|^2 \right) e^{-u^2/2}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ et son intégrale vaut $E(f) - \Phi(f)$. En retranchant l'intégrale intervenant à la question 11, c'est-à-dire

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2} du = 0$$

on obtient que la fonction

$$u \mapsto \left(\left(\ln(f(\varphi(u))) - \frac{1}{2} |u - \varphi(u)|^2 \right) - (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) \right) e^{-u^2/2}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale vaut $E(f) - \Phi(f)$.

En vertu de la première identité établie à la question 6, cette dernière fonction est égale à

$$u \mapsto (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2}$$

Il s'ensuit que

La fonction $u \mapsto (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

et finalement :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2} du$$

15 En vertu de l'inégalité (1), pour tout réel $t > 0$, on a $\ln t \leq t - 1$. Considérons un élément u de $\mathbb{R}$. Le réel $\varphi'(u)$ est strictement positif et l'inégalité précédente implique que

$$\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)) \geq 0$$

puis

$$(\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2} \geq 0$$

Intégrons cette inégalité sur $\mathbb{R}$. Il vient, d'après la question précédente,

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2} du \geq 0$$

d'où

$E(f) \geq \Phi(f)$

16 Analyse : soit f une fonction de H_0 telle que $E(f) = \Phi(f)$. Notons φ la fonction qui lui est associée dans la question 4. On a, d'après la question 14,

$$0 = E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2} du$$

Comme on l'a vu à la question précédente, l'intégrande est une fonction positive sur $\mathbb{R}$. C'est en outre une fonction continue. Comme elle est d'intégrale nulle, elle est nulle sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \ln(\varphi'(u)) = \varphi'(u) - 1$$

L'étude de la fonction α , menée à la première question, prouve que le seul réel t strictement positif vérifiant $\ln t = t - 1$ est 1. Il en résulte que, pour tout réel u , on a $\varphi'(u) = 1$. Par conséquent,

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \varphi(u) = u + C$$

Il s'agit bien d'un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout réel u , $\varphi^{-1}(u) = u - C$. D'après la seconde relation obtenue à la question 6, il en ressort que, pour tout réel x ,

$$\ln(f(x)) = \ln((\varphi^{-1})'(x)) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (\varphi^{-1}(x))^2 = \frac{x^2 - (x - C)^2}{2}$$

d'où

$$f(x) = \exp\left(Cx - \frac{C^2}{2}\right)$$

Synthèse : réciproquement, prenons un réel C et considérons la fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \exp\left(Cx - \frac{C^2}{2}\right) \end{cases}$$

Assurons-nous que la fonction f appartient à l'ensemble H_0 et qu'elle satisfait la relation $E(f) = \Phi(f)$. Tout d'abord, elle est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Montrer que f appartient à H revient à trouver un réel $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq \frac{1}{\rho} \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \rho\right)x^2\right) \quad (6)$$

c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{1}{2} - \rho\right)x^2 - Cx + \frac{C^2}{2} - \ln \rho \geq 0$$

D'après les résultats classiques sur les polynômes de degré 2, pour que ceci soit vérifié, il suffit que $\frac{1}{2} - \rho$ soit strictement positif et que le discriminant

$$C^2 - 4\left(\frac{1}{2} - \rho\right)\left(\frac{C^2}{2} - \ln \rho\right)$$

soit négatif. Le discriminant écrit ci-dessus est une fonction continue de ρ qui admet $-\infty$ pour limite quand ρ tend vers 0. Il existe donc un réel $\rho \in]0; 1/2[$ tel que le discriminant soit négatif. En conséquence, la majoration (6) est vérifiée. Ainsi, f appartient à H . Afin d'établir que f appartient à H_0 , prenons x dans $\mathbb{R}$ et écrivons

$$\int_{-\infty}^{x+C} f(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{x+C} e^{-\frac{(u-C)^2}{2}} du$$

En effectuant le changement de variable $v = u - C$ dans le membre de droite, on a

$$\int_{-\infty}^{x+C} f(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-v^2/2} dv$$

Dans cette dernière égalité, faisons tendre x vers $+\infty$. La condition d'appartenance de f à H_0 est alors satisfaite. De plus, la relation précédente indique que la fonction associée à f qui apparaît à la question 4 est $\varphi : x \mapsto x + C$. Alors, pour tout réel u , on a $\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)) = 0$. Le résultat de la question 14 permet d'en déduire que la quantité $E(f) - \Phi(f)$ est nul.

On a donc prouvé que les fonctions f appartenant à H_0 et vérifiant $E(f) = \Phi(f)$ sont toutes les fonctions de la forme

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \exp\left(Cx - \frac{C^2}{2}\right) \end{cases}$$

où C désigne un réel quelconque.