

IV. SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DÉVELOPPABLES EN SÉRIE ENTIÈRE

30 Notons comme l'énoncé f la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Puisque f est de rayon de convergence infini, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver son expression terme à terme. Ainsi, pour tout réel x ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}$$

après changement d'indice. Par suite,

$$\begin{aligned} x(f''(x) - f'(x)) + p f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= p a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [n(n+1) a_{n+1} - (n-p) a_n] x^n \end{aligned}$$

On reconnaît à droite une nouvelle série entière, qui est donc, d'après le cours, de somme nulle si et seulement si ses coefficients sont nuls. En d'autres termes,

La fonction f est solution de (E_p) si et seulement si $a_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n(n+1) a_{n+1} = (n-p) a_n$$

31 Supposons que (E_p) ait une solution f polynomiale non nulle et notons d son degré. En particulier, f est développable en série entière sous la forme

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang $d+1$ et $a_d \neq 0$. Le résultat de la question 30 s'applique. On a donc $a_0 = 0$ d'où nécessairement $d > 0$. De plus,

$$d(d+1) \underbrace{a_{d+1}}_{=0} = (d-p) \underbrace{a_d}_{\neq 0}$$

ce qui donne $p = d$. En particulier, $p \in \mathbb{N}^*$.

Réciproquement, supposons $p \in \mathbb{N}^*$. Définissons une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad a_{n+1} = \frac{(n-p) a_n}{n(n+1)}$$

En particulier, $a_{p+1} = 0$ puis $a_n = 0$ pour tout $n \geq p+1$ par récurrence immédiate. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est donc nulle à partir du rang $p+1$ ce qui prouve que l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est polynomiale (et non nulle puisque $a_1 \neq 0$).

Par construction, il s'agit de plus d'une solution de (E_p) en vertu du résultat de la question précédente. Ainsi,

L'équation (E_p) admet des solutions polynomiales non identiquement nulle si et seulement si $p \in \mathbb{N}^*$.

La démonstration précédente a permis d'établir que si f est une solution polynomiale non nulle, alors son degré est égal à p et son coefficient constant est nul, soit $f(0) = 0$. Compte tenu du résultat de la question 2,

Si $p \in \mathbb{N}^*$, les solutions polynomiales de (E_p) sont de degré p et éléments de E .

On peut justifier assez facilement que lorsque $p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions polynomiales de (E_p) est une droite vectorielle engendrée par la fonction polynomiale définie dans la réciproque.

32 La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) car produit d'une fonction exponentielle et d'une fonction polynomiale. De plus, pour tout réel x ,

$$h'(x) = P'(x) e^{-x} - P(x) e^{-x}$$

puis

$$h''(x) = P''(x) e^{-x} - 2P'(x) e^{-x} + P(x) e^{-x}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} x(h''(x) + h'(x)) + p h(x) &= x(P''(x) e^{-x} - P'(x) e^{-x}) + p P(x) e^{-x} \\ &= (x(P''(x) - P'(x)) + p P(x)) e^{-x} \end{aligned}$$

Le terme de droite est nul puisque P est une solution de (E_p) . On peut donc conclure.

La fonction h est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$x(y'' + y') + p y = 0$$

33 La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout réel x ,

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

La fonction P est polynomiale donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ également. Par produit de fonctions développables en séries entières (via le produit de Cauchy),

La fonction h est développable en série entière.

La précision du produit de Cauchy n'est pas indispensable mais permet de montrer que l'on sait de quoi on parle. On rappelle que l'ensemble des fonctions développables en séries entières sur un intervalle ouvert I centré en 0 est stable par combinaison linéaire et produit. Le programme s'en tient là. Il ne comporte notamment aucun résultat concernant la composition de deux fonctions développables en série entière. Un exercice très classique permet de justifier que si une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 avec $f(0) \neq 0$, alors $1/f$ l'est également. Une version de ce résultat peut être trouvée dans le sujet de Centrale PC 2 2021, en tout début de partie III.

34 Justifions l'égalité demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{P}(n) : \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1} (n+p-1)!}{p! n! (n-1)!} b_1$$

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geq 1$.

- $\mathcal{P}(1)$ est clairement vraie, les deux membres de l'égalité étant égaux à b_1 .
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée. La relation de récurrence donnée par l'énoncé permet d'écrire que

$$b_{n+1} = \frac{-(n-p)}{n(n+1)} b_n = \frac{-(n-p)}{n(n+1)} \frac{(-1)^{n-1} (n+p-1)!}{p! n! (n-1)!} b_1 = \frac{(-1)^n (n-p)!}{p! (n+1)! n!} b_1$$

ce qui montre que l'égalité est vraie au rang $n+1$.

- Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1} (n+p-1)!}{p! n! (n-1)!} b_1$

35 La fonction g_p est développable en série entière pour les mêmes raisons que la fonction h de la question 33. Il en est donc de même de toutes ses dérivées, en particulier de $g_p^{(p)}$. Calculons ce développement. Pour tout réel x ,

$$g_p(x) = x^{p-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+p-1}$$

D'après le cours, le développement en série entière de $g_p^{(p)}$ s'obtient en dérivant terme à terme cette égalité. Notons que le premier terme de la somme étant de degré $p-1$, il disparaît dans la dérivée p -ième. Ainsi,

$$\begin{aligned} g_p^{(p)}(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (n+p-1) \cdots n \cdot x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

Le résultat de la question 34 permet d'en déduire que

$$\frac{b_1}{p!} x g_p^{(p)}(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = -h(x)$$

et ainsi, puisque $h(x) = P(x)e^{-x}$ par définition,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = -\frac{b_1}{p!} x e^x g_p^{(p)}(x)}$$

36 On définit comme à la question 31 une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence de la manière suivante

$$a_0 = 0 \quad a_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad a_{n+1} = \frac{(n-p)a_n}{n(n+1)}$$

Puisque $p \notin \mathbb{N}^*$, le facteur $n-p$ ne s'annule jamais donc une récurrence immédiate prouve que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne s'annule jamais si a_1 est non nul. De plus,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n-p)}{n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La règle de d'Alembert adaptée aux séries entières assure que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence infini. Enfin, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie par construction la relation de récurrence de la question 30, ce qui prouve que la somme de cette série entière est solution de l'équation différentielle (E_p) .

Il existe des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ non identiquement nulles telles que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence infini et une somme solution de (E_p) .

À nouveau, on peut assez facilement justifier que l'ensemble des suites en question forme une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

37 D'après le résultat de la question 30, puisque f est solution de (E_p) ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |a_{n+1}| = \left| \frac{(n-p)a_n}{n(n+1)} \right|$$

et en particulier, pour $n > p$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |a_{n+1}| = |a_n| \frac{(n-p)}{n(n+1)}$$

Il suffit ensuite pour conclure de remarquer que $(n-p)/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc ce quotient est minoré par $1/2$ à partir d'un certain rang. On prend alors q égal à ce rang.

$$\boxed{\exists q > p \quad \forall n \geq q \quad |a_{n+1}| \geq \frac{|a_n|}{2(n+1)}}$$

38 Justifions la minoration par récurrence. Pour tout $n \geq q$, on note

$$\mathcal{P}(n) : \quad |a_n| \geq \frac{q!}{2^{n-q} n!} |a_q|$$

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $q \geq n$.

- $\mathcal{P}(q)$ est clairement vraie, les deux membres de l'égalité étant égaux à $|a_q|$.
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: Soit $n \geq q$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée. L'inégalité de la question 37 permet d'écrire que

$$|a_{n+1}| \geq \frac{1}{2(n+1)} |a_n| = \frac{1}{2(n+1)} \frac{q!}{2^{n-q} n!} |a_q| = \frac{q!}{2^{n+1-q} (n+1)!} |a_q|$$

ce qui montre que l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq q \quad |a_n| \geq \frac{q!}{2^{n-q} n!} |a_q|}$$

39 Notons que la fonction ψ définie par l'énoncé est bien définie car une série entière est absolument convergente sur son domaine ouvert de convergence et que f a un rayon de convergence infini. Minorons ψ au voisinage de $+\infty$. Commençons par écrire pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{n=q}^{+\infty} |a_n| x^n \\ &\geq \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{q!}{2^{n-q} n!} |a_q| x^n \quad (\text{d'après la question 38}) \\ \psi(x) &\geq q! 2^q |a_q| \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} \end{aligned}$$

en sortant de la somme les facteurs indépendants de n . La somme de droite est un reste de série exponentielle. On peut donc écrire

$$\psi(x) \geq A (e^{x/2} - S(x))$$

où $A = q! 2^q |a_q|$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{q-1} (x/2)^n / n!$

Rappelons que a_q n'est pas nulle, sans quoi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ serait nulle à partir du rang q , et (E_p) admettrait une solution polynomiale, ce qui n'est pas possible d'après le résultat de la question 31 puisque $p \notin \mathbb{N}^*$. La quantité $S(x)$ est une quantité polynomiale donc négligeable devant $e^{x/2}$ au voisinage de $+\infty$. Par suite,

$$e^{x/2} - S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x/2} \quad \text{puis} \quad (e^{x/2} - S(x))^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$$

et
$$\psi(x)^2 \frac{e^{-x}}{x} \geq A^2 (e^{x/2} - S(x))^2 \frac{e^{-x}}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A^2}{x}$$

Cette minoration assure grâce au critère de Riemann que $x \mapsto \psi(x)^2 e^{-x}/x$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Par conséquent,

La fonction ψ n'est pas un élément de E.

40 La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = \frac{n-p}{n(n+1)} a_n$$

Cela implique en particulier que a_{n+1} et a_n sont de même signe dès lors que $n > p$. Avec les notations des questions précédentes, on en déduit que pour $x > 0$,

$$\psi(x) = \sum_{n=q}^{+\infty} |a_n| x^n = \left| \sum_{n=q}^{+\infty} a_n x^n \right| = \left| f(x) - \sum_{n=0}^{q-1} a_n x^n \right|$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on peut ensuite écrire

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{q-1} a_n x^n \right| \leq |f(x)| + T(x)$$

où $T(x) = \sum_{n=0}^{q-1} |a_n| x^n$ et ainsi

$$|f(x)| \geq \psi(x) - T(x) \geq A(e^{x/2} - R(x)) + T(x)$$

Comme à la question 39, on en déduit la minoration

$$f(x)^2 \frac{e^{-x}}{x} \geq [A(e^{x/2} - S(x)) + T(x)]^2 \frac{e^{-x}}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A^2}{x}$$

ce qui permet de conclure que

La fonction f n'est pas un élément de E.

V. ÉLÉMENTS PROPRES DE U

41 La question 22 a permis d'établir que $\text{Ker } U$ était réduit à $\{0\}$. En particulier, cela assure que

Le réel 0 n'est pas valeur propre de U.

42 Par hypothèse, $U(f) = \lambda f$ donc

$$U(f)' = \lambda f' \quad \text{et} \quad U(f)'' = \lambda f''$$

Le résultat de la question 18 assure alors que pour tout réel x

$$\lambda f''(x) - \lambda f'(x) = -\frac{f(x)}{x}$$

$$\text{soit puisque } \lambda \neq 0, \quad x(f''(x) - f'(x)) + \frac{1}{\lambda} f(x) = 0$$

En d'autres termes,

La fonction f est solution de l'équation différentielle $(E_{1/\lambda})$.

43 Raisonnons par l'absurde en supposant que λ n'est pas de la forme $1/p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. En particulier, $1/\lambda$ n'est pas un élément de $\mathbb{N}^*$. Le résultat de la question 40 affirme notamment que dans ce cas, toute solution de $(E_{1/\lambda})$ développable en série entière sur $\mathbb{R}_+^*$ n'est pas un élément de E . Or, par définition, U est un endomorphisme de E , donc f est un élément de E . Il y a donc contradiction. Par conséquent,

Les seules valeurs propres possibles de U sont de la forme $\lambda = 1/p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

44 L'énoncé omet de demander de démontrer que $U(P)$ est bien défini, autrement dit que P est un élément de E . Ce n'est pas immédiat car on a seulement supposé que P est solution de (E_p) . Il va falloir justifier ce résultat d'autant plus qu'il est nécessaire pour appliquer l'une des questions précédentes.

En appliquant (E_p) en $x = 0$, on obtient $P(0) = 0$. Le résultat de la question 2 assure alors que P est un élément de E . Ainsi, $U(P)$ est bien définie. Notons $z = pU(P) - P$. Par linéarité de la dérivation,

$$z' = pU(P)' - P' \quad \text{et} \quad z'' = pU(P)'' - P''$$

d'où
$$z'' - z' = p(U(P)'' - U(P)') + P' - P''$$

Le résultat de la question 18 assure que pour tout $x > 0$,

$$U(P)''(x) - U(P)'(x) = -\frac{P(x)}{x}$$

Par ailleurs, P étant solution de (E_p) , il vient également

$$x(P''(x) - P'(x)) + pP(x) = 0 \quad \text{soit} \quad P'(x) - P''(x) = p \frac{P(x)}{x}$$

En injectant ces deux égalités dans l'expression de $z'' - z$, il vient pour tout $x > 0$

$$z''(x) - z'(x) = -p \frac{P(x)}{x} + p \frac{P(x)}{x} = 0$$

ce qui permet de conclure.

La fonction $pU(P) - P$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$.

45 L'équation différentielle $y'' - y' = 0$ est linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre. Son équation caractéristique $r^2 - r = 0$ admet deux racines simples 0 et 1. Le cours assure que les solutions de cette équation différentielle sont les applications de la forme

$$y : x \mapsto a e^{1 \cdot x} + b e^{0 \cdot x} = a e^x + b$$

où a et b sont deux réels. Le résultat de la question 3 montre qu'une telle fonction est un élément de E si et seulement si $a = b = 0$. Puisque $pU(P) - P$ est à la fois solution de l'équation différentielle et élément de E , cette fonction est nulle. En d'autres termes, $U(P) = 1/p P$, soit encore

La fonction polynomiale P est un vecteur propre de U associé à la valeur propre $1/p$.

46 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question 31, (E_p) admet des solutions polynomiales non nulles, qui sont de degré p et élément de E . Le résultat de la question 35 précise qu'elles sont colinéaires à P_p . En particulier, cela implique que P_p est lui-même solution de (E_p) . D'après le résultat de la question 45, il est donc vecteur propre de U associé à la valeur propre $1/p$.

Considérons maintenant deux entiers $p \neq q \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après le résultat de la question 29,

$$\langle P_p | U(P_q) \rangle = \langle U(P_p) | P_q \rangle \quad \text{soit} \quad \frac{1}{q} \langle P_p | P_q \rangle = \frac{1}{p} \langle P_p | P_q \rangle$$

puis
$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \langle P_p | P_q \rangle = 0$$

Étant donné que $p \neq q$, on a également $\frac{1}{p} \neq \frac{1}{q}$ d'où l'on déduit que

$$\langle P_p | P_q \rangle = 0$$

ce qui signifie que P_p et P_q sont orthogonaux. Ceci étant valable quels que soient p et q ,

Les polynômes $(P_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux orthogonaux.

On vient simplement de redémontrer que les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux. C'est un résultat de cours dans le cadre des espaces euclidiens, mais il ne peut pas être utilisé tel quel dans un espace préhilbertien (bien que la preuve soit strictement identique).