

II. UNE ÉTUDE DE MARCHE ALÉATOIRE

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé, la variable aléatoire X_n est centrée. Autrement dit,

$$0 = E(X_n) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} xP(X_n = x) = P(X_n = 1) - P(X_n = -1)$$

Comme $(X_n = 1)$ et $(X_n = -1)$ sont des événements contraires,

$$P(X_n = -1) = 1 - P(X_n = 1)$$

Par suite, $0 = 2P(X_n = 1) - 1$ d'où $P(X_n = 1) = 1/2 = P(X_n = -1)$. Remarquons alors que, puisque X_n prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$, la variable aléatoire $Y_n = (1 + X_n)/2$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$: elle suit une loi de Bernoulli. En outre,

$$P(Y_n = 1) = P(1 + X_n = 2) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

On a montré que

La variable aléatoire $\frac{1 + X_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

15 Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. L'événement A_i est réalisé si, et seulement si,

$$\sum_{k=1}^{2i} X_k = 0$$

ce qui équivaut aussi à
$$\sum_{k=1}^{2i} Y_k = \sum_{k=1}^{2i} \frac{1 + X_k}{2} = i$$

Or, les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_{2i}$ étant toutes indépendantes (d'après le lemme des coalitions) et de même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, la variable aléatoire $Y_1 + \dots + Y_{2i}$ suit une loi binomiale de paramètres $2i$ et $1/2$. Il s'ensuit que

$$P(A_i) = P\left(\sum_{k=1}^{2i} Y_k = i\right) = \binom{2i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{2i-i}$$

soit

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(A_i) = \binom{2i}{i} \frac{1}{4^i}$

16 Remarquons que

$$S_n = \ell \iff \sum_{k=1}^n X_k = \ell \iff \sum_{k=1}^n \frac{1 + X_k}{2} = \frac{n + \ell}{2} \iff \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{n + \ell}{2}$$

La probabilité de cette dernière égalité est nulle si $\ell < -n$, $\ell > n$ ou encore si $n + \ell$ est impair (ce qui équivaut à dire que $\ell - n$ est impair puisque $\ell - n = -(n + \ell) + 2\ell$). En effet,

$$\forall \omega \in \Omega \quad \sum_{k=1}^n Y_k(\omega) \in \llbracket 0; n \rrbracket$$

On peut ainsi déjà affirmer que

$P(S_n = \ell) = 0 \text{ si } \ell - n \text{ est impair.}$

Par ailleurs, si $-n \leq \ell \leq n$ et si $\ell - n$ est pair, comme

$$\sum_{k=1}^n Y_k \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

on a
$$P(S_n = \ell) = \binom{n}{(n+\ell)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+\ell}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{n+\ell}{2}}$$

et cette égalité reste valable même si $\ell < -n$ ou $\ell > n$ puisque le coefficient binomial est alors nul. Par conséquent,

$$P(S_n = \ell) = \binom{n}{(n+\ell)/2} \frac{1}{2^n} \text{ si } \ell - n \text{ est pair.}$$

17 Par comparaison de séries à termes positifs, on peut immédiatement affirmer que

$$\text{La série } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} d_n \text{ est divergente.}$$

Distinguons alors deux cas :

- Si, à partir d'un certain rang, $c_k = d_k$, alors comme les séries de termes généraux c_k et d_k sont toutes deux divergentes vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^n c_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n d_k$$

- Sinon, comme $c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} d_n$, on a pour n au voisinage de $+\infty$, $d_n - c_n = o(c_n)$. Or, par hypothèse, les quantités c_n et $(d_n - c_n)$ sont non nulles à partir d'un certain rang et la série de terme général c_n est divergente : le théorème admis dans l'énoncé donne alors

$$\sum_{k=1}^n d_k - \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n (d_k - c_k) = o\left(\sum_{k=1}^n c_k\right)$$

ce qui signifie là encore que

$$\sum_{k=1}^n c_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n d_k$$

Ainsi, dans les deux cas,

$$\sum_{k=1}^n c_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n d_k$$

Voici une démonstration du théorème admis dans l'énoncé. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^n |b_k|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme, pour k au voisinage de $+\infty$, $a_k = o(b_k)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq n_0 \quad \left| \frac{a_k}{b_k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi, pour tout $k \geq n_0$,

$$-|b_k| \frac{\varepsilon}{2} \leq a_k \leq |b_k| \frac{\varepsilon}{2}$$

Par suite, pour tout $n \geq n_0$,

$$-\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0}^n |b_k| \leq \sum_{k=n_0}^n a_k \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0}^n |b_k|$$

autrement dit $-(B_n - B_{n_0}) \frac{\varepsilon}{2} \leq A_n - A_{n_0} \leq (B_n - B_{n_0}) \frac{\varepsilon}{2}$

Les $(b_k)_{k \geq n_0}$ étant non nuls, la quantité B_n est strictement positive pour tout $n \geq n_0$. Il s'ensuit

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{A_{n_0}}{B_n} + \frac{B_{n_0}}{B_n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{A_n}{B_n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{A_{n_0}}{B_n} - \frac{B_{n_0}}{B_n} \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme, par hypothèse, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$\left| \frac{A_{n_0}}{B_n} + \frac{B_{n_0}}{B_n} \frac{\varepsilon}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{A_{n_0}}{B_n} - \frac{B_{n_0}}{B_n} \frac{\varepsilon}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_1$,

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{A_n}{B_n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui revient à dire que $\left| \frac{A_n}{B_n} \right| \leq \varepsilon$

Cela prouve donc que $\frac{A_n}{B_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ soit encore $A_n = o(B_n)$.

18 Notons, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbb{1}_{A_i}$ la fonction indicatrice de l'événement A_i . On rappelle que celle-ci vaut 1 si l'événement A_i est réalisé et 0 sinon. Puisque les indices d'égalité ne peuvent être que des entiers pairs,

$$N_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_i}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A_i)$. Par conséquent, elle admet une espérance égale à $P(A_i)$. Par suite, la variable aléatoire N_n admet aussi une espérance finie qui s'écrit, par linéarité de l'espérance,

$$E(N_n) = E\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n E(\mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Grâce à la question 15, on conclut que

$$\text{La variable aléatoire } N_n \text{ admet une espérance finie égale à } \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} \binom{2i}{i}.$$

19 Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4^i} \binom{2i}{i} = \frac{1}{4^i} \frac{(2i)!}{(i!)^2}$

Ainsi, d'après la formule de Stirling rappelée en début d'énoncé,

$$\frac{1}{4^i} \binom{2i}{i} \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4^i} \frac{\left(\frac{2i}{e}\right)^{2i} \sqrt{4\pi i}}{\left(\left(\frac{i}{e}\right)^i \sqrt{2\pi i}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi i}}$$

Or la série de terme général $1/\sqrt{i}$ est une série de Riemann divergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série

$$\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{4^i} \binom{2i}{i}$$

est également divergente. On peut appliquer les questions 17 et 18 qui donnent

$$E(N_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} \binom{2i}{i} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$$

En outre, d'après la question 10,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Par transitivité de la relation d'équivalence asymptotique, on conclut que

$$E(N_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}$$

On peut déduire de ce résultat que si n tend vers l'infini, la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ repasse par l'origine une infinité de fois. Cette affirmation est encore vraie si on considère une telle marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$: à chaque étape, on se déplace d'une unité vers la gauche, la droite, le haut ou le bas avec la même probabilité. Ce n'est en revanche plus vrai lorsqu'on considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geq 3$.

20 Comme à la question 18, si pour tout $j \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$, on appelle B_j l'événement « l'entier j est un indice d'égalité », alors

$$M_n = \sum_{j=1}^{2n} \mathbb{1}_{B_j}$$

d'où

$$E(M_n) = \sum_{j=1}^{2n} P(B_j)$$

Puisque les nombres impairs ne peuvent pas être des indices d'égalité, on a en fait

$$E(M_n) = \sum_{i=1}^n P(B_{2i})$$

Fixons $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Tirer $2i$ boules successivement de l'urne sans remise revient à choisir un $2i$ -arrangement dans un ensemble à $2n$ éléments : le nombre de possibilités est égal à $(2n)!/(2n-2i)!$. Par ailleurs, l'événement B_i est réalisé si on a tiré i boules blanches et i boules noires. Ainsi, pour construire un élément de B_i , on peut procéder de la façon suivante :

- Choisir d'abord les tirages où on a obtenu des boules blanches : il y a $\binom{2i}{i}$ choix différents.
- Puis choisir le i -arrangement des n boules blanches qui seront obtenues à ces tirages : il y a $n!/(n-i)!$ possibilités.
- Enfin, choisir le i -arrangement des n boules noires qui seront obtenues aux tirages restants : il y a aussi $n!/(n-i)!$ possibilités.

Par le principe multiplicatif, on en déduit que

$$\text{Card}(B_i) = \binom{2i}{i} \frac{n!}{(n-i)!} \frac{n!}{(n-i)!}$$

Tous les tirages étant équiprobables, il s'ensuit que

$$P(B_i) = \frac{\binom{2i}{i} \frac{n!}{(n-i)!} \frac{n!}{(n-i)!}}{\frac{(2n)!}{(2n-2i)!}} = \frac{\binom{2i}{i} \frac{(2n-2i)!}{(n-i)! (n-i)!}}{\frac{(2n)!}{n! n!}} = \frac{\binom{2i}{i} \binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}}$$

On a obtenu le résultat suivant :

$$E(M_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\binom{2i}{i} \binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}}$$

Comme le terme d'indice n de la somme vaut 1, ce qui est aussi la valeur d'un éventuel terme d'indice 0, on conclut que

$$E(M_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i} \binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}}$$

21 Comme à la question 19, utilisons à nouveau la formule de Stirling : pour k au voisinage de $+\infty$,

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \sqrt{4\pi k}}{\left(\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\right)^2} = \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$$

Par définition de la relation d'équivalence en $+\infty$, il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de limite nulle telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \binom{2k}{k} = \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}} (1 + \varepsilon_k)$$

Le coefficient binomial et la fraction étant strictement positifs, on a aussi $1 + \varepsilon_k > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \geq 2$, d'après ce qui précède et la question 20,

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i} \binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i} \binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\frac{4^i}{\sqrt{\pi i}} (1 + \varepsilon_i) \frac{4^{n-i}}{\sqrt{\pi(n-i)}} (1 + \varepsilon_{n-i})}{\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} (1 + \varepsilon_n)} \\ E(M_n) &= 1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1 + \varepsilon_i)(1 + \varepsilon_{n-i})}{1 + \varepsilon_n} \end{aligned}$$

Or, d'après la question 13,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et d'après la question 11,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$$

Ces deux assertions entraînent

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$$

et il s'ensuit
$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}$$

Comme, pour n au voisinage de $+\infty$, $1 = o(\sqrt{n})$, on a donc

$$E(M_n) = \sqrt{\pi n} + o(\sqrt{n})$$

Autrement dit,

$$\boxed{E(M_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}}$$