

I. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1 Notons $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{F} = (e'_1, \dots, e'_n)$ et $\mathcal{G} = (e''_1, \dots, e''_n)$ les trois bases de $\mathbb{R}^n$. Introduisons également les matrices

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(g \circ f), \quad B = \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(g) \quad \text{et} \quad C = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$$

Par définition des matrices B et C,

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f(e_j) = \sum_{k=1}^n C_{k,j} e'_k \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad g(e'_k) = \sum_{i=1}^n B_{i,k} e''_i$$

Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Comme g est une application linéaire,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(e_j) &= g\left(\sum_{k=1}^n C_{k,j} e'_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n C_{k,j} g(e'_k) \\ &= \sum_{k=1}^n C_{k,j} \sum_{i=1}^n B_{i,k} e''_i \\ (g \circ f)(e_j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n B_{i,k} C_{k,j}\right) e''_i \end{aligned}$$

Mais, par définition de la matrice A, on sait également que

$$(g \circ f)(e_j) = \sum_{i=1}^n A_{i,j} e''_i$$

Par unicité de la décomposition dans la base $\mathcal{G}$, on déduit que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad A_{i,j} = \sum_{k=1}^n B_{i,k} C_{k,j} = (BC)_{i,j}$$

par définition du produit matriciel. On conclut que $A = BC$, ce qui se réécrit

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)}$$

2 Remarquons que $f = f \circ \text{id}_{\mathbb{R}^n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ f$. En appliquant deux fois la formule de la question 1, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(f) &= \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(f \circ \text{id}_{\mathbb{R}^n}) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ f) \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) \\ \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(f) &= \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) \end{aligned}$$

Définissons les matrices $P = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n})$ et $Q = \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n})$ et montrons qu'elles sont inversibles. En appliquant à nouveau la formule démontrée en question 1, on remarque que

$$I_n = \text{Mat}_{\mathcal{G}, \mathcal{G}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \text{id}_{\mathbb{R}^n}) = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) \text{Mat}_{\mathcal{G}, \mathcal{E}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) = P \text{Mat}_{\mathcal{G}, \mathcal{E}}(\text{id}_{\mathbb{R}^n})$$

Ainsi, la matrice P admet un inverse à droite, donc elle est dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. On montre que $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ à l'aide du même raisonnement, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\text{Il existe } (P, Q) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2 \text{ tel que } \text{Mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(f) = P \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f) Q.}$$

Le niveau de détail demandé dans cette question est ambigu : le résultat demandé est explicitement au programme, mais la question n'est pas présentée comme une question de cours. On pourrait par exemple utiliser le fait que la matrice d'un isomorphisme dans un couple de bases est inversible sans le redémontrer.

3 Par définition, le vecteur X vérifie $MX = \lambda X$. Montrons que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : M^k X = \lambda^k X$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $M^0 X = I_n X = X$ et $\lambda^0 X = 1 \times X = X$.
- $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$: Supposons que $M^k X = \lambda^k X$ pour un $k \in \mathbb{N}$. On constate alors que

$$M^{k+1} X = M(M^k X) = M(\lambda^k X) = \lambda^k (MX) = \lambda^k (\lambda X) = \lambda^{k+1} X$$

La proposition $\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad M^k X = \lambda^k X}$$

4 Soit Π un polynôme annulateur de M de degré $d \in \mathbb{N}$, noté

$$\Pi(Y) = \sum_{i=1}^d a_i Y^i$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M associée au vecteur propre X . On a $\Pi(M) = 0_n$, et par conséquent $\Pi(M)X = 0_{\mathbb{R}^n}$. En utilisant le résultat de la question 3,

$$0_{\mathbb{R}^n} = \Pi(M)X = \left(\sum_{i=1}^d a_i M^i \right) X = \sum_{i=1}^d a_i (M^i X) = \sum_{i=1}^d a_i (\lambda^i X) = \left(\sum_{i=1}^d a_i \lambda^i \right) X$$

Le vecteur X étant un vecteur propre de M , il est non nul et par conséquent,

$$0 = \sum_{i=1}^d a_i \lambda^i = \Pi(\lambda)$$

On conclut que λ est une racine de Π dans $\mathbb{C}$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, on obtient finalement que

Si Π est un polynôme annulateur de M , toute valeur propre complexe de M est une racine complexe de Π .

II. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

5 Rappelons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifions que Γ_A est linéaire. Pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\Gamma_A(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = \Gamma_A(M) + \lambda \Gamma_A(N)$$

L'application Γ_A est donc linéaire, et a pour ensemble de départ et d'arrivée $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On conclut que

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \Gamma_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$$

6 Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons f et u les applications linéaires canoniquement associées à A et M . Comme A est inversible, f est un isomorphisme donc conserve le rang. Ainsi,

$$\text{rg}(f \circ u) = \text{rg}(u) \quad \text{donc} \quad \text{rg}(AM) = \text{rg}(M)$$

On obtient finalement que $\text{rg}(\Gamma_A(M)) = \text{rg}(M)$. En conclusion,

$$\boxed{\text{Si } A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \text{ alors } \Gamma_A \text{ conserve le rang.}}$$

7 D'après le résultat de la question 5, on constate que Γ est bien à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \Gamma(A + \lambda B)(M) &= \Gamma_{A+\lambda B}(M) \\ &= (A + \lambda B)M \\ &= AM + \lambda BM \\ &= \Gamma_A(M) + \lambda \Gamma_B(M) \\ \Gamma(A + \lambda B)(M) &= \Gamma(A)(M) + \lambda \Gamma(B)(M) \end{aligned}$$

Ainsi, $\Gamma(A + \lambda B) = \Gamma(A) + \lambda \Gamma(B)$ et Γ est une application linéaire. Pour montrer qu'elle est injective, considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Gamma(A) = 0_n$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$0_n = \Gamma(A)(M) = \Gamma_A(M) = AM$$

En prenant une matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on remarque alors que

$$A = AMM^{-1} = (AM)M^{-1} = 0_n M^{-1} = 0_n$$

donc A est la matrice nulle et $\text{Ker}(\Gamma) \subset \{0_n\}$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie, il vient $\text{Ker}(\Gamma) = \{0_n\}$. On conclut que

$$\boxed{\text{L'application } \Gamma \text{ est linéaire et injective.}}$$

8 Montrons que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \quad \Gamma_{A^k} = (\Gamma_A)^k$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $\Gamma_{A^0} = \Gamma_{I_n} = (M \mapsto M) = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = (\Gamma_A)^0$
- $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$: Supposons que $\Gamma_{A^k} = (\Gamma_A)^k$ pour un $k \in \mathbb{N}$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\Gamma_{A^{k+1}}(M) = A^{k+1}M = A(A^k M) = A\Gamma_{A^k}(M) = A(\Gamma_A)^k(M)$$

Comme $\Gamma_A(N) = AN$ pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\Gamma_{A^{k+1}}(M) = \Gamma_A((\Gamma_A)^k(M)) = (\Gamma_A \circ (\Gamma_A)^k)(M) = (\Gamma_A)^{k+1}(M)$$

Finalement, $\Gamma_{A^{k+1}} = (\Gamma_A)^{k+1}$ et $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad \Gamma_{A^k} = (\Gamma_A)^k}$$

9 Soit $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$, noté

$$\Pi(Y) = \sum_{i=1}^d a_i Y^i$$

En utilisant le résultat de la question 8 et la linéarité de Γ montrée en question 7,

$$\Gamma_{\Pi(A)} = \Gamma(\Pi(A)) = \Gamma\left(\sum_{i=1}^d a_i A^i\right) = \sum_{i=1}^d a_i \Gamma(A^i) = \sum_{i=1}^d a_i \Gamma_{A^i} = \sum_{i=1}^d a_i (\Gamma_A)^i = \Pi(\Gamma_A)$$

On déduit que

$$\boxed{\forall \Pi \in \mathbb{R}[X] \quad \Gamma_{\Pi(A)} = \Pi(\Gamma_A)}$$

10 Soit $\Pi \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que Π est annulateur de A si et seulement s'il est annulateur de Γ_A . On a montré en question 7 que Γ est injective donc

$$\Pi(A) = 0_n \iff \Gamma_{\Pi(A)} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$$

En utilisant le résultat de la question 9,

$$\Gamma_{\Pi(A)} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))} \iff \Pi(\Gamma_A) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$$

Ainsi, A et Γ_A ont les mêmes polynômes annulateurs. Ces endomorphismes sont diagonalisables si et seulement s'ils admettent un polynôme annulateur scindé à racines simples. On conclut que

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable si et seulement } \Gamma_A \text{ est diagonalisable.}}$$

11 D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est un polynôme annulateur de A . On a montré en question 10 que A et Γ_A ont les mêmes polynômes annulateurs, donc

$$\boxed{\text{Le polynôme } \chi_A \text{ est un polynôme annulateur de } \Gamma_A.}$$

De même, χ_{Γ_A} est un polynôme annulateur de Γ_A donc

$$\boxed{\text{Le polynôme } \chi_{\Gamma_A} \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

12 Rappelons que les valeurs propres d'un endomorphisme sont exactement les racines de son polynôme caractéristique. Ainsi,

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \chi_A(\lambda) = 0\} \quad \text{et} \quad \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \chi_{\Gamma_A}(\lambda) = 0\}$$

D'après le résultat de la question 11, χ_{Γ_A} est un polynôme annulateur de A . On sait alors, en utilisant le résultat de la question 4, que

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \chi_{\Gamma_A}(\lambda) = 0\} = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A)$$

De même, χ_A est un polynôme annulateur de Γ_A donc

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \chi_A(\lambda) = 0\} = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$$

Finalement,

$$\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)}$$

13 Soient $(P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^4$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi_{P_2, Q_2}(M) = \Phi_{P_1, Q_1}(P_2 M Q_2) = P_1 P_2 M Q_2 Q_1 = \Phi_{P_1 P_2, Q_2 Q_1}(M)$$

Les matrices $P_1 Q_1$ et $Q_2 P_2$ sont inversibles comme produit de matrices inversibles, et on déduit que $\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi_{P_2, Q_2} \in \mathcal{L}_1$. En effectuant le même raisonnement pour les trois cas restants, on montre que

$$\Psi_{P_1, Q_1} \circ \Phi_{P_2, Q_2}(M) = P_1 (P_2 M Q_2)^\top Q_1 = P_1 Q_2^\top M^\top P_2^\top Q_1 = \Psi_{P_1 Q_2^\top, P_2^\top Q_1}(M)$$

d'où $\Psi_{P_1, Q_1} \circ \Phi_{P_2, Q_2} \in \mathcal{L}_2$, puis

$$\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Psi_{P_2, Q_2}(M) = P_1 P_2 M^\top Q_2 Q_1 = \Psi_{P_1 P_2, Q_2 Q_1}(M)$$

donc $\Psi_{P_1, Q_1} \circ \Psi_{P_2, Q_2} \in \mathcal{L}_2$, et

$$\Psi_{P_1, Q_1} \circ \Psi_{P_2, Q_2}(M) = P_1 (P_2 M^\top Q_2)^\top Q_1 = P_1 Q_2^\top M P_2^\top Q_1 = \Phi_{P_1 Q_2^\top, P_2^\top Q_1}(M)$$

d'où $\Psi_{P_1, Q_1} \circ \Psi_{P_2, Q_2} \in \mathcal{L}_1$. Ainsi, si $(\Theta, \Theta') \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^2$, alors $\Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Autrement dit,

L'espace $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition.

14 On sait déjà que $\Phi_{P, Q}$ et $\Psi_{P, Q}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est un espace vectoriel de dimension finie. En réutilisant les calculs de la question 13, on remarque que

$$\Phi_{P^{-1}, Q^{-1}} \circ \Phi_{P, Q} = \Phi_{P^{-1}P, QQ^{-1}} = \Phi_{I_n, I_n} = (M \mapsto M) = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

ce qui permet d'affirmer que

L'application $\Phi_{P, Q}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de réciproque $\Phi_{P^{-1}, Q^{-1}}$.

De même, on a montré que

$$\Psi_{P, Q} \circ \Psi_{(Q^{-1})^\top, (P^{-1})^\top} = \Psi_{P((P^{-1})^\top)^\top, ((Q^{-1})^\top)^\top Q} = \Psi_{PP^{-1}, Q^{-1}Q} = \Phi_{I_n, I_n} = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

ce qui assure que

L'application $\Psi_{P, Q}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de réciproque $\Psi_{(Q^{-1})^\top, (P^{-1})^\top}$.

15 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'application linéaire canoniquement associée à M . Introduisons également les applications linéaires f et g canoniquement associées à P et Q . Comme P et Q sont inversibles, f et g sont des isomorphismes donc conservent le rang. Ainsi,

$$\text{rg}(f \circ u \circ g) = \text{rg}(u) \quad \text{donc} \quad \text{rg}(PMQ) = \text{rg}(M)$$

On obtient finalement $\text{rg}(\Phi_{P, Q}(M)) = \text{rg}(M)$, donc

L'application $\Phi_{P, Q}$ conserve le rang.

Comme la transposition conserve le rang, on remarque que

$$\text{rg}(\Psi_{P, Q}(M)) = \text{rg}(PM^\top Q) = \text{rg}(\Phi_{P, Q}(M^\top)) = \text{rg}(M^\top) = \text{rg}(M)$$

donc

L'application $\Psi_{P, Q}$ conserve le rang.

Pour les étudiants de MPSI, il est aussi possible de remarquer que $\Phi_{P, Q}(M)$ et M sont des matrices équivalentes donc de même rang.

16 Rappelons que pour tout couple de matrices $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a

$$\det(M_1 M_2) = \det(M_1) \det(M_2) \quad \text{et} \quad \det(M_1^\top) = \det(M_1)$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient alors

$$\det(\Psi_{P, Q}(M)) = \det(PM^\top Q) = \det(P) \det(M^\top) \det(Q) = \det(P) \det(Q) \det(M)$$

et $\det(\Phi_{P,Q}(M)) = \det(PMQ) = \det(P) \det(M) \det(Q) = \det(P) \det(Q) \det(M)$

Tous ces déterminants valent $\det(M)$ si et seulement si $\det(P) \det(Q) = 1$, donc

Les applications $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant si et seulement si $\det(P) \det(Q) = 1$.

17 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme la matrice P est inversible, les matrices M et PMP^{-1} sont semblables et elles ont donc le même polynôme caractéristique. Ainsi,

$$\chi_{\Phi_{P,P^{-1}}(M)} = \chi_{PMP^{-1}} = \chi_M$$

De même, comme $\chi_M = \chi_{M^\top}$,

$$\chi_{\Psi_{P,P^{-1}}(M)} = \chi_{PM^\top P^{-1}} = \chi_{\Phi_{P,Q}(M^\top)} = \chi_{M^\top} = \chi_M$$

En conclusion,

Les applications $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ conservent le polynôme caractéristique.

18 On constate que $\Psi_{I_n, I_n} = (M \mapsto M^\top) = \mathcal{T}$ donc $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_2$. Montrons maintenant que $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1$ en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe deux matrices $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathcal{T} = \Phi_{P,Q}$. Autrement dit,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad M^\top = PMQ$$

En particulier, en prenant $M = I_n$, on obtient $I_n = PQ$ donc $Q = P^{-1}$. En posant ensuite $M = P$, il vient $P^\top = PPQ = PPP^{-1} = P$. Ainsi,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad M^\top = PMP^{-1}$$

ce qui se réécrit aussi sous la forme $M^\top P = PM$. Comme $P = P^\top$, on obtient que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad PM = M^\top P = M^\top P^\top = (PM)^\top$$

Comme P est inversible, toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $N = PM$ avec $M = P^{-1}N$. Ainsi, on a prouvé que

$$\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad N = N^\top$$

Mais comme $n \geq 2$, ce résultat est absurde et on obtient la contradiction recherchée. Finalement,

$$\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{T} \in \mathcal{L}_2$$

19 Supposons qu'il existe un endomorphisme Φ dans $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. On peut alors écrire $\Phi = \Phi_{P_1, Q_1} = \Psi_{P_2, Q_2}$ avec $(P_1, Q_1, P_2, Q_2) \in (GL_n(\mathbb{R}))^4$. En particulier,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad P_1 M Q_1 = P_2 M^\top Q_2$$

Comme P_1 et Q_1 sont inversibles, on obtient

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad M^\top = P_2^{-1} P_1 M Q_1 Q_2^{-1}$$

Les matrices $P_2^{-1} P_1$ et $Q_1 Q_2^{-1}$ sont inversibles comme produit de matrices inversibles, ce qui prouve que

$$\mathcal{T} = \Phi_{P_2^{-1} P_1, Q_1 Q_2^{-1}} \in \mathcal{L}_1$$

Mais on a montré en question 18 que si $n \geq 2$, alors $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1$. On obtient alors une contradiction, ce qui prouve que

Les ensembles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont disjoints.

III. ENDOMORPHISMES DE RANG DONNÉ

20 Remarquons que la famille $\mathcal{B}'$ est bien une base car f est un isomorphisme. Notons cette base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. On a alors

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f(e_i) = e'_i = 1 \times e'_i + \sum_{k \neq i} 0 \times e'_k$$

Par unicité de la décomposition dans une base, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, seul le i -ième coefficient de la colonne i est non nul et vaut 1. On conclut que

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{I}_n}$$

21 Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$. Supposons que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f(e_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Par linéarité de f , on obtient

$$0_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i\right) \quad \text{d'où} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \in \text{Ker}(f)$$

Mais par définition de $\mathcal{B}$, les sous-espaces $\text{Vect}(\{e_i\}_{1 \leq i \leq k})$ et $\text{Ker}(f)$ sont en somme directe donc

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \in \text{Ker}(f) \cap \text{Vect}(\{e_i\}_{1 \leq i \leq k}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

La famille $(e_1, \dots, e_k)$ est libre ce qui permet de conclure que, pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, on a $\alpha_i = 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{La famille } (f(e_1), \dots, f(e_k)) \text{ est libre.}}$$

22 Le noyau $\text{Ker}(f)$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ donc $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 1$. Par construction de $\mathcal{B}$, on sait que

$$k = n - \text{Card}(\mathcal{B}_2) = n - \dim(\text{Ker}(f)) \leq n - 1$$

En particulier,

$$\boxed{k < n}$$

23 Notons $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Soit $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, on a

$$f(e_i) = e'_i = 1 \times e'_i + \sum_{j \neq i} 0 \times e'_j$$

donc seul le i -ième coefficient de la colonne i est non nul et vaut 1. Considérons maintenant $i \in \llbracket k+1; n \rrbracket$, alors $e_i \in \text{Ker}(f)$ et

$$f(e_i) = 0 = \sum_{j=1}^n 0 \times e'_j$$

donc la colonne i est nulle. Finalement,

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \text{I}_k & 0_{k, n-k} \\ \hline 0_{n-k, k} & 0_{n-k} \end{array} \right)}$$

On vient de retrouver la matrice $J_{n,k}$ définie dans la suite du problème. Notons que le résultat de cette question est explicitement au programme de MPSI mais pas de PCSI, ce qui désavantage certains étudiants.

24 Notons f l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, notée $\mathcal{B}_c$, et distinguons trois cas selon la valeur de $r = \text{rg}(f)$.

- Si $r = n$, f est un isomorphisme. Posons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_c$. En utilisant la base $\mathcal{B}'$ introduite à la question 20 et la formule de changement de base prouvée à la question 2, il existe $(P_1, Q_1) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que

$$I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = P_1 \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) Q_1 = P_1 M Q_1$$

En posant $P = P_1^{-1}$ et $Q = Q_1^{-1}$ on a bien $M = P I_n Q$ et $M = \Phi_{P,Q}(J_{n,n})$ car $J_{n,n} = I_n$.

- Si $0 < r < n$, f n'est pas nul et $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Considérons la base $\mathcal{B}$ introduite à la question 21. En utilisant la base $\mathcal{B}'$ introduite à la question 22 et la formule de changement de base de la question 2, il existe $(P_2, Q_2) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que

$$J_{n,r} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = P_2 \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) Q_2 = P_2 M Q_2$$

En posant $P = P_2^{-1}$ et $Q = Q_2^{-1}$ on a $M = P I_n Q$ donc $M = \Phi_{P,Q}(J_{n,r})$.

- Si $r = 0$, on a bien $M = 0_{n,n} = J_{n,0}$ et $M = \Phi_{I_n, I_n}(J_{n,0})$ convient.

Finalement, dans tous les cas,

Il existe $(P, Q) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $M = \Phi_{P,Q}(J_{n,r})$.

25 Introduisons les endomorphismes f et g associés aux matrices A et B dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, notée $\mathcal{B}_c$. Comme $\text{rg}(f) = 1$, on est dans le deuxième point de la question 24. En utilisant la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ définie à la question 21 et la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ de la question 22, on a montré qu'il existe $(P, Q) \in (\text{GL}_2(\mathbb{R}))^2$ tel que

$$J_{2,1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = PAQ \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) = PBQ$$

Intéressons-nous plus en détail au vecteur e'_2 introduit en question 22 pour compléter la famille $(e'_1) = (f(e_1))$ en une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette construction, tout vecteur e'_2 non nul et non colinéaire à e'_1 convient. Comme g n'est pas l'application nulle, il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(v) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Posons $e'_2 = g(v)$, et vérifions que la famille $(f(e_1), g(v))$ est libre. Supposons que $af(e_1) + bg(v) = 0_{\mathbb{R}^2}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0$,

$$f(e_1) = -\frac{b}{a}g(v) \quad \text{d'où} \quad f(e_1) \in \text{Im}(g) \cap \text{Im}(f)$$

Les deux images sont distinctes et de dimension 1, de sorte que $\text{Im}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $f(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Mais $f(e_1)$ a été choisi en question 21 pour former une famille libre et n'est pas nul, d'où une contradiction. De même, si $b \neq 0$, on obtient

$$g(v) = -\frac{a}{b}f(e_1) \quad \text{d'où} \quad g(v) \in \text{Im}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

À nouveau, $g(v) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ par définition, ce qui mène à une contradiction. On conclut que $(a, b) = (0, 0)$ et que la famille $(f(e_1), g(v))$ est libre. Comme $\text{rg}(g) = 1$, on sait également que $\text{Im}(g) = \text{Vect}(e'_2)$. En particulier, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$g(e_1) = \alpha e'_2 = \alpha e'_2 + 0 \times e'_1 \quad \text{et} \quad g(e_2) = \beta e'_2 = \beta e'_2 + 0 \times e'_1$$

d'où
$$\text{PBQ} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Finalement, on sait que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ car la matrice B est non nulle. En posant $P_2 = P^{-1}$ et $Q_2 = Q^{-1}$, on a bien montré que

Il existe $(P_2, Q_2) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \quad \text{et} \quad B = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$$

IV. ENDOMORPHISMES DE $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ CONSERVANT LE RANG

26 Par définition de la transposition, on remarque que

$$\mathcal{T}(B_1) = B_1, \quad \mathcal{T}(B_2) = B_3, \quad \mathcal{T}(B_3) = B_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(B_4) = B_4$$

Il suit que

$$T = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{ca}}}(\mathcal{T}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

27 La matrice T trouvée en question 26 est symétrique réelle. Le théorème spectral permet donc d'affirmer que

La matrice T est diagonalisable.

28 Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $(M^\top)^\top = M$ ce qui se réécrit $\mathcal{T}^2 = \text{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Ainsi, le polynôme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de $\mathcal{T}$ ayant pour racines 1 et -1 . En utilisant le résultat de la question 4, on déduit que les valeurs propres de $\mathcal{T}$ sont incluses dans $\{-1, 1\}$. Comme on a montré en question 27 que $\mathcal{T}$ est diagonalisable, et que $T \neq I_4$ ou $T \neq -I_4$, l'inclusion est une égalité et

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}) = \{-1, 1\}$$

Un vecteur $X = (x, y, z, t)^\top \in \mathbb{R}^4$ appartient à $\text{Ker}(T - I_4)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff y = z$$

On en déduit que

$$\text{Ker}(T - I_4) = \text{Vect}((1, 0, 0, 0)^\top, (0, 0, 0, 1)^\top, (0, 1, 1, 0)^\top)$$

En repassant dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on conclut que

Le sous-espace propre associé à 1 est $\text{Vect}(B_1, B_4, B_2 + B_3)$.

De même, $X = (x, y, z, t)^\top \in \mathbb{R}^4$ appartient à $\text{Ker}(T + I_4)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases}$$

On déduit que $\text{Ker}(T + I_4) = \text{Vect}((0, 1, -1, 0)^\top)$

En repassant dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on conclut que

Le sous-espace propre associé à 1 est $\text{Vect}(B_2 - B_3)$.

29 Évaluons $\Phi_{P,Q}$ sur chaque élément de la base $\mathcal{B}_{ca}$:

$$\Phi_{P,Q}(B_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{pmatrix} = aeB_1 + afB_2 + ceB_3 + cfB_4$$

$$\Phi_{P,Q}(B_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag & ah \\ cg & ch \end{pmatrix} = agB_1 + ahB_2 + cgB_3 + chB_4$$

$$\Phi_{P,Q}(B_3) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} be & bf \\ de & df \end{pmatrix} = beB_1 + bfB_2 + deB_3 + dfB_4$$

$$\Phi_{P,Q}(B_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{pmatrix} = bgB_1 + bhB_2 + dgB_3 + dhB_4$$

La matrice de $\Phi_{P,Q}$ dans la base $\mathcal{B}_{ca}$ s'écrit donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{ca}}(\Phi_{P,Q}) = \begin{pmatrix} ae & ag & be & bg \\ af & ah & bf & bh \\ ce & cg & de & dg \\ cf & ch & df & dh \end{pmatrix}$$

d'où

$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{ca}}(\Phi_{P,Q}) = \left(\begin{array}{c|c} aU & bU \\ \hline cU & dU \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = Q^\top$

30 Soit $M \in \text{Ker}(\Phi)$, alors $\Phi(M) = 0_2$ donc $\text{rg}(\Phi(M)) = 0$. Mais Φ conserve le rang, ce qui implique que $\text{rg}(M) = \text{rg}(\Phi(M)) = 0$. On déduit que $M = 0_2$, puis que $\text{Ker}(\Phi) = \{0_2\}$. Comme Φ est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, il est aussi bijectif et

L'application Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

31 En utilisant les expressions de B_1 , B_4 et $B_1 + B_4$, on calcule

$$\text{rg}(B_1) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \text{rg}(B_4) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

et

$$\text{rg}(B_1 + B_4) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Comme Φ conserve le rang, on déduit que

$\text{rg}(\Phi(B_1)) = 1, \quad \text{rg}(\Phi(B_4)) = 1 \quad \text{et} \quad \text{rg}(\Phi(B_1 + B_4)) = 2$

Définissons les matrices $A = \Phi(B_1)$ et $B = \Phi(B_4)$, qui sont de rang 1. Pour appliquer le résultat de la question 25, il faut vérifier que $\text{Im}(A)$ et $\text{Im}(B)$ sont distinctes. Par l'absurde, supposons que $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$. Par linéarité de Φ ,

$$1 = \text{rg}(A) = \text{rg}(A + B) = \text{rg}(\Phi(B_1) + \Phi(B_4)) = \text{rg}(\Phi(B_1 + B_4)) = 2$$

On obtient une contradiction, donc $\text{Im}(A)$ et $\text{Im}(B)$ sont distinctes. La question 25 montre alors qu'il existe $(P_2, Q_2) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ tels que

$$\Phi(B_1) = A = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \quad \text{et} \quad \Phi(B_4) = B = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$$

En posant $P_1 = P_2^{-1}$ et $Q_1 = Q_2^{-1}$, on conclut que

Il existe $(P_1, Q_1) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ tels que

$$\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

32 D'après le résultat de la question 31,

$$\Phi'(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1, \quad \text{et} \quad \Phi'(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \alpha B_3 + \beta B_4$$

Par unicité de la décomposition dans $\mathcal{B}_{ca}$, on déduit que

$$C_1 = (1, 0, 0, 0)^\top \quad \text{et} \quad C_4 = (0, 0, \alpha, \beta)^\top$$

33 D'après le résultat de la question 15, l'application Φ_{P_1, Q_1} conserve le rang. Comme Φ conserve également le rang, $\Phi' = \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi$ conserve encore le rang. Pour tout $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, on sait alors que

$$1 = \text{rg}(B_i) = \text{rg}(\Phi'(B_i)) = \text{rg}(B'_i) = \text{rg} \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$$

Une matrice de rang 1 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas inversible, son déterminant est donc nul. En utilisant la formule du déterminant d'une matrice de taille 2×2 , il vient

$$\forall i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket \quad a_i d_i - b_i c_i = 0$$

34 Rappelons qu'on a montré en question 32 que $a_1 = 1$ et que $b_1 = c_1 = d_1 = 0$. Comme Ψ' est linéaire et conserve le rang, et puisque

$$\text{rg}(B_1 + B_2) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

on a

$$\begin{aligned} 1 &= \text{rg}(\Phi'(B_1 + B_2)) \\ &= \text{rg}(\Phi'(B_1) + \Phi'(B_2)) \\ &= \text{rg}(B'_1 + B'_2) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right) \\ 1 &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 + a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une matrice de rang 1 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas inversible donc son déterminant est nul. En utilisant le résultat de la question 33 pour $i = 2$, il vient

$$(1 + a_2)d_2 - b_2c_2 = 0 \quad \text{d'où} \quad d_2 = -(a_2d_2 - b_2c_2) = 0$$

En effectuant le même raisonnement avec

$$\text{rg}(B_1 + B_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

on prouve que

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 + a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 1$$

puis que $(1 + a_3)d_3 - b_3c_3 = 0 \quad \text{d'où} \quad d_3 = -(a_3d_3 - b_3c_3) = 0$

Ainsi,

$$\boxed{d_2 = d_3 = 0}$$

35 Rappelons que d'après le résultat de la question 32, $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = d_1 = 0$. On a également montré en question 34 que $d_2 = d_3 = 0$, et on a supposé dans cette question que $c_2 = 0$. Ainsi, la matrice M' s'écrit

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

On a prouvé en question 30 que Φ est un automorphisme, et en question 14 que Φ_{P_1, Q_1} est un automorphisme. Ainsi, $\Phi' = \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi$ est aussi un automorphisme, et sa matrice M' est inversible. Comme elle est triangulaire,

$$0 \neq \det(M') = 1 \times b_2 \times c_3 \times d_4 = b_2c_3d_4$$

Le produit est non nul si et seulement si chaque terme est non nul, d'où

$$\boxed{\text{Les réels } b_2, c_3 \text{ et } d_4 \text{ sont tous non nuls.}}$$

36 On a montré en question 35 que $c_3 \neq 0$. Mais $b_3c_3 = 0$, donc $b_3 = 0$. Comme Φ' est linéaire et conserve le rang, on constate que

$$1 = \text{rg}(B_3 + B_4) = \text{rg}(B'_3 + B'_4) = \text{rg} \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 + c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

La matrice du membre de droite est ainsi de déterminant nul, donc $a_3d_4 = 0$. Mais on a montré en question 35 que $d_4 \neq 0$, donc $a_3 = 0$. De même,

$$1 = \text{rg}(B_2 + B_4) = \text{rg}(B'_2 + B'_4) = \text{rg} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

À nouveau, le déterminant de cette matrice est nul donc $a_2d_4 - b_2c_4 = 0$. On applique une troisième fois la même méthode pour montrer que

$$1 = \text{rg}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) = \text{rg}(B'_1 + B'_2 + B'_3 + B'_4) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 + a_2 & b_2 \\ c_3 + c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

et que $0 = (1 + a_2)d_4 - b_2(c_3 + c_4) = d_4 - b_2c_3 + (a_2d_4 - b_2c_4) = d_4 - b_2c_3$

On obtient alors $d_4 = b_2 c_3$. D'après le résultat de la question 35, $b_2 \neq 0$. En réinjectant l'expression de d_4 dans $a_2 d_4 - b_2 c_4 = 0$, on trouve que $c_4 = a_2 c_3$. Finalement,

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c_4 = a_2 c_3 \quad \text{et} \quad d_4 = b_2 c_3$$

37 Remarquons que la matrice M' peut se mettre sous la forme

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} U & 0_2 \\ \hline 0_2 & c_3 U \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

Définissons les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = U^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

On a montré en question 35 que $c_3 \neq 0$ et $b_2 \neq 0$. Ainsi, les matrices P et Q sont triangulaires de diagonale non nulle, donc inversibles. Le résultat de la question 29 implique alors que $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{ca}}}(\Phi_{P,Q})$ et donc que $\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi = \Phi_{P,Q}$. En reprenant les résultats des questions 13 et 14,

$$\Phi = \Phi_{P_1, Q_1}^{-1} \circ \Phi_{P,Q} = \Phi_{P_1^{-1}, Q_1^{-1}} \circ \Phi_{P,Q} \in \mathcal{L}_1$$

d'où

$$\boxed{\Phi \in \mathcal{L}_1}$$

38 Comme $c_2 \neq 0$ et $b_2 c_2 = 0$, on déduit que $b_2 = 0$. On sait également d'après le résultat de la question 32 que $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = d_1 = 0$ et d'après le résultat de la question 34 que $d_2 = d_3 = 0$. En utilisant l'expression de T trouvée à la question 26,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{ca}}}(\Phi' \circ \mathcal{T}) = M' T = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

On conclut que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{ca}}}(\Phi' \circ \mathcal{T}) = \begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

39 On sait que $c_3 b_3 = 0$. Par l'absurde, si $b_3 = 0$, alors la deuxième ligne de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{ca}}}(\Phi' \circ \mathcal{T})$ obtenue à la question 38 est nulle, donc la matrice n'est pas inversible. Mais on a montré à la question 33 que Φ' est un automorphisme, et $\mathcal{T}$ est également un automorphisme donc $\Phi' \circ \mathcal{T}$ est un automorphisme et sa matrice dans la base $\mathcal{B}_{\text{ca}}$ est inversible. On obtient une contradiction, donc $b_3 \neq 0$. Ainsi, on a nécessairement

$$\boxed{c_3 = 0}$$

40 Adaptons le raisonnement de la sous-partie IV.C. pour obtenir des relations entre les coefficients a_i , b_i , c_i et d_i . Notons $M'' = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{ca}}}(\Phi' \circ \mathcal{T})$. Puisqu'on a montré en question 39 que $c_3 = 0$, la matrice M'' est triangulaire supérieure. De plus, $\Phi' \circ \mathcal{T}$ est un automorphisme donc

$$0 \neq \det(M'') = 1 \times b_3 \times c_2 \times d_4 = b_3 c_2 d_4$$

Il suit que b_3 , c_2 et d_4 sont tous non nuls. Notons $(B_i'')_{1 \leq i \leq 4}$ les colonnes de M'' . Comme Φ' et $\mathcal{T}$ conservent le rang, $\Phi' \circ \mathcal{T}$ conserve aussi le rang et

$$1 = \text{rg}(B_3 + B_4) = \text{rg}(B_3'' + B_4'') = \text{rg} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 + c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

La matrice du membre de droite est ainsi de déterminant nul, et $a_2 d_4 = 0$. Mais comme $d_4 \neq 0$, on a nécessairement $a_2 = 0$. De même,

$$1 = \text{rg}(B_2 + B_4) = \text{rg}(B_2'' + B_4'') = \text{rg} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

À nouveau, le déterminant de la matrice est nul et $a_3 d_4 - b_3 c_4 = 0$. Enfin,

$$1 = \text{rg}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) = \text{rg}(B_1'' + B_2'' + B_3'' + B_4'') = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 + a_3 & b_3 \\ c_2 + c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

et $0 = (1 + a_3)d_4 - b_3(c_2 + c_4) = d_4 - b_3 c_2 + (a_3 d_4 - b_3 c_4) = d_4 - b_3 c_2$

Il vient que $d_4 = b_3 c_2$. En réinjectant cette expression dans $a_3 d_4 - b_3 c_4 = 0$ et en utilisant le fait que $b_3 \neq 0$, on obtient $c_4 = a_3 c_2$. Finalement, M'' peut se mettre sous la forme

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} U & 0_2 \\ \hline 0_2 & c_2 U \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

Définissons les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = U^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Comme $c_2 \neq 0$ et $b_3 \neq 0$, les matrices P et Q sont inversibles, et le résultat de la question 29 assure que $M'' = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{ca}}(\Phi_{P,Q})$. Ainsi, $\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi \circ \mathcal{T} = \Phi_{P,Q}$. En reprenant les résultats des questions 13 et 14, on a alors

$$\Phi = \Phi_{P_1, Q_1}^{-1} \circ \Phi_{P,Q} \circ \mathcal{T} = \Phi_{P_1^{-1}, Q_1^{-1}} \circ \Psi_{P,Q} \in \mathcal{L}_2$$

On conclut que

$$\boxed{\Phi \in \mathcal{L}_2}$$

V. ENDOMORPHISME DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ CONSERVANT LE DÉTERMINANT OU LE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Attention, les notations diffèrent dans les parties IV et V et Φ désigne à présent un endomorphisme qui conserve le déterminant (et non plus le rang).

41 L'endomorphisme Φ conserve le déterminant donc

$$\det(A) = \det(\Phi(A)) = \det(0_2) = 0$$

Ainsi, la matrice A n'est pas inversible donc $\text{rg}(A) \leq 1$. Mais par hypothèse, la matrice A est non nulle d'où $\text{rg}(A) \geq 1$. On conclut que

$$\boxed{\text{rg}(A) = 1}$$

42 Remarquons tout d'abord que

$$\det(A + N) = \det(PJ_{2,1}Q + PQ - PJ_{2,1}Q) = \det(PQ) = \det(P) \det(Q) \neq 0$$

car $P, Q \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$. Comme Φ est linéaire et conserve le déterminant, on a aussi

$$\begin{aligned} \det(A + N) &= \det(\Phi(A + N)) \\ &= \det(\Phi(A) + \Phi(N)) \\ &= \det(0_2 + \Phi(N)) \\ &= \det(\Phi(N)) \\ &= \det(N) \\ &= \det(P(I_2 - J_{2,1})Q) \\ &= \det(P) \det(I_2 - J_{2,1}) \det(Q) \\ &= \det(P) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \det(Q) \\ &= \det(P) \times 0 \times \det(Q) \\ \det(A + N) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient une contradiction, ce qui permet de conclure que si A est une matrice vérifiant $\Phi(A) = 0_2$, alors nécessairement $A = 0_2$. Ainsi, $\text{Ker}(\Phi) = \{0_2\}$ et

L'application Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

43 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Distinguons les cas selon la valeur de $r = \text{rg}(A)$.

- Si $r = 0$, $A = 0_2$ et $\Phi(A) = 0_2$. Ainsi, $\text{rg}(\Phi(A)) = 0 = r$.
- Si $r = 1$, $A \neq 0_2$ et A n'est pas inversible, donc $\det(A) = 0$. Comme Φ conserve le déterminant, $\det(\Phi(A)) = 0$. Ainsi, $\Phi(A)$ n'est pas inversible donc $\text{rg}(\Phi(A)) \leq 1$. Mais on a montré à la question 42 que Φ est un automorphisme, donc $\Phi(A) \neq 0_2$ et $\text{rg}(\Phi(A)) \geq 1$. Finalement, $\text{rg}(\Phi(A)) = 1 = r$.
- Si $r = 2$, $\det(A) \neq 0$. Comme Φ conserve le déterminant, $\det(\Phi(A)) \neq 0$ donc $\Phi(A)$ est inversible, donc $\text{rg}(\Phi(A)) = 2 = r$.

Dans chacun des cas, on a bien démontré que $\text{rg}(A) = \text{rg}(\Phi(A))$, et on conclut que

L'application Φ conserve le rang.

44 D'après le résultat admis à la fin de la question 43, les endomorphismes qui conservent le déterminant conservent également le rang. En utilisant la généralisation de la fin de la partie IV.C, ces endomorphismes sont exactement les éléments de $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Ainsi, si un endomorphisme conserve le rang, il s'écrit nécessairement $\Phi_{P,Q}$ ou $\Psi_{P,Q}$ avec $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Mais d'après le résultat de la question 16, $\Phi_{P,Q}$ ou $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant si et seulement si $\det(P) \det(Q) = 1$. Ainsi,

Les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le déterminant sont les endomorphismes $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ où $(P, Q) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ vérifient $\det(P) \det(Q) = 1$.

45 Rappelons que les espaces $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, et introduisons $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M + \lambda N) &= \sum_{i=1}^n (M + \lambda N)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n (M_{i,i} + \lambda N_{i,i}) \\ &= \sum_{i=1}^n M_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^n N_{i,i} \\ \mathrm{Tr}(M + \lambda N) &= \mathrm{Tr}(M) + \lambda \mathrm{Tr}(N)\end{aligned}$$

L'application Tr est linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est donc une forme linéaire. De plus, pour tout couple de matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} B_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n B_{j,i} A_{i,j} = \sum_{j=1}^n (BA)_{j,j} = \mathrm{Tr}(BA)$$

On conclut que

L'application Tr est une forme linéaire vérifiant $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

46 Définissons $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^\top B)$. L'application φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Vérifions que c'est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- Symétrie: En utilisant les propriétés de Tr rappelées en question 45,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^\top B) = \mathrm{Tr}(BA^\top) = \varphi(B, A)$$

- Bilinéarité: Soient $(B_1, B_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme Tr est linéaire,

$$\begin{aligned}\varphi(A, B_1 + \lambda B_2) &= \mathrm{Tr}(A^\top (B_1 + \lambda B_2)) \\ &= \mathrm{Tr}(A^\top B_1 + \lambda A^\top B_2) \\ &= \mathrm{Tr}(A^\top B_1) + \lambda \mathrm{Tr}(A^\top B_2) \\ \varphi(A, B_1 + \lambda B_2) &= \varphi(A, B_1) + \lambda \varphi(A, B_2)\end{aligned}$$

L'application φ est donc linéaire à droite. Comme elle est symétrique, elle est aussi linéaire à gauche.

- Définie-positivité: Remarquons que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(A, A) = \mathrm{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n (A^\top A)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A^\top)_{i,j} A_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A_{j,i})^2 \geq 0$$

Si $\varphi(A, A) = 0$, chaque terme de la somme vaut 0 et $A_{j,i} = 0$ pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. On déduit que $A = 0_n$.

On conclut finalement que

L'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
--

Comme en début de sujet, le niveau de détail demandé dans cette question est ambigu. La question n'est pas présentée comme une question de cours, mais on voit que cette application est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui est un résultat explicitement au programme.

47 Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\text{Tr}(AM) = 0$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, en posant $M = A^\top$, on a

$$0 = \text{Tr}(AA^\top) = \text{Tr}(A^\top A) = \varphi(A, A)$$

D'après le résultat de la question 46, φ est définie positive donc on a nécessairement $A = 0_n$. On conclut que

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\text{Tr}(AM) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A = 0_n$.

48 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rappelons que son polynôme caractéristique s'écrit

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Soit Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a aussi

$$\chi_{\Phi(A)}(X) = \det(XI_n - \Phi(A)) = X^n - \text{Tr}(\Phi(A))X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(\Phi(A))$$

Supposons que Φ conserve le polynôme caractéristique, on a donc $\chi_A = \chi_{\Phi(A)}$. En identifiant les coefficients de χ_A et $\chi_{\Phi(A)}$, on obtient que $\det(A) = \det(\Phi(A))$ et que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(\Phi(A))$. On conclut que

Si un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conserve le polynôme caractéristique, il conserve également le déterminant et la trace.

49 Soit Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conserve le polynôme caractéristique. D'après le résultat de la question 48, Φ conserve aussi le déterminant et la trace. En utilisant le résultat de la question 44, on sait alors que Φ s'écrit $\Phi_{P,Q}$ ou $\Psi_{P,Q}$ avec $(P, Q) \in (\text{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\det(P)\det(Q) = 1$. Supposons que $\Phi = \Phi_{P,Q}$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(\Phi(M)) = \text{Tr}(PMQ)$$

En utilisant le résultat de la question 45,

$$0 = \text{Tr}(M) - \text{Tr}(PMQ) = \text{Tr}(M) - \text{Tr}(QPM) = \text{Tr}(M - QPM) = \text{Tr}((I_n - QP)M)$$

Ceci étant vrai pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le résultat de la question 47 montre que $I_n - QP = 0_n$, d'où $PQ = I_n$, puis $Q = P^{-1}$. Dans le cas où $\Phi = \Psi_{P,Q}$, on a cette fois $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(PM^\top Q)$, puis

$$0 = \text{Tr}(M) - \text{Tr}(M^\top QP) = \text{Tr}(M) - \text{Tr}((QP)^\top M) = \text{Tr}((I_n - (QP)^\top)M)$$

Ceci étant vrai pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le résultat de la question 47 montre que $I_n = (QP)^\top$ d'où $Q = P^{-1}$. Ainsi, $\Phi = \Phi_{P,P^{-1}}$ ou $\Phi = \Psi_{P,P^{-1}}$. Réciproquement, on a montré en question 17 que $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ conservent le polynôme caractéristique. On conclut que

Les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le polynôme caractéristique sont les endomorphismes $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ où $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.