

Dans tout le chapitre, les fonctions étudiées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

1.1 Construction de l'intégrale de Riemann

On se contente ici de donner les éléments essentiels de la construction de l'intégrale de Riemann :

- **Etape 1 :** Définition pour les fonctions en escaliers. Cette notion coïncide avec la notion d'aire algébrique sous la courbe représentative de la fonction.
- **Etape 2 :** Uniforme continuité sur un segment. Une fonction continue sur un segment est uniformément continue. C'est une conséquence assez simple du résultat suivant (lequel est un cas particulier du théorème de Bolzano-Weierstrass) : « De toute suite réelle (ou complexe) bornée, on peut extraire une sous-suite convergente ».
- **Etape 3 :** Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.
- **Etape 4 :** Définition de l'intégrale de Riemann : L'intégrale d'une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f continue converge vers un réel indépendant du choix de la suite. C'est ce que l'on note l'intégrale de f sur le segment.

1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 1

- Une fonction f est dite continue par morceaux sur un segment $[a; b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ du segment telle que pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, f restreinte à $]x_i; x_{i+1}[$ est continue et admet des limites finies en x_i et en x_{i+1} . On dit alors que la subdivision $(x_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est adaptée à f .
- Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle quelconque I si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I .

Remarque 1

- Une fonction continue par morceaux peut très bien prendre en x_i une valeur différente de ses limites à gauche et à droite en ce point.
- Il n'y a pas unicité d'une subdivision adaptée à f : on peut toujours lui ajouter un nombre fini quelconque de valeurs.

Exemple 1

- Une fonction en escalier est continue par morceaux ;
- La fonction partie fractionnaire $x \mapsto x - E(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;
- La fonction $\tan$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ à $\mathbb{R}$ n'est pas prolongeable à $\mathbb{R}$ tout entier en une fonction continue par morceaux (à cause des limites infinies à gauche et à droite aux points où elle n'est pas définie).

Remarque 2

L'ensemble $\mathcal{C}_{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est stable par combinaisons linéaires et par produit. En revanche, un quotient ou une composée de fonctions continues par morceaux ne l'est pas nécessairement.

Définition 2

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a; b]$ et $(x_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ une subdivision adaptée à f . On définit l'intégrale de f sur $[a; b]$ par la formule

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}_i(t) dt$$

où pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\tilde{f}_i$ est le prolongement par continuité à $[x_i; x_{i+1}]$ de la restriction de f à $]x_i; x_{i+1}[$.

Remarque 3

Cette quantité est indépendante du choix de la subdivision adaptée à f . Elle ne dépend pas non plus des valeurs prises par f en les points d'une subdivision qui lui est adaptée. Deux fonctions continues par morceaux sur un segment qui diffèrent en un nombre fini de points ont la même intégrale.

1.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Intégrale de fonctions continues par morceaux

Proposition 1

Les propriétés découlent immédiatement de celles des intégrales de fonctions à valeurs réelles. Dans tous les énoncés, f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a; b]$.

- L'application $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R})$.
- Si le segment est centré en 0, c'est-à-dire $a = -b$, alors
 - Si f est paire, alors $\int_{-b}^b f(t) dt = 2 \int_0^b f(t) dt$.
 - Si f est impaire, alors $\int_{-b}^b f(t) dt = 0$.

- Pour tout $c \in [a; b]$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

- Si $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

De plus, si f et g sont continues, alors l'égalité n'a lieu que lorsque $f = g$.

Dans tous les cas

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Exercice 1

Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f(t)^n \right)^{1/n} dt$$

Lien entre intégration et dérivation

Théorème 1

Soit I un intervalle quelconque et c un point de I . Soit $h \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$. Alors l'application

$$H : I \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto \int_c^x h(t) dt$$

- est continue sur I .
- est dérivable en tout point de I en lequel h est continue avec $H'(x) = h(x)$.

Remarque 4

On peut définir la notion de primitive d'une fonction continue par morceaux de la manière suivante : F est une primitive d'une fonction f si elle est continue et si elle est dérivable, de dérivée $f(x)$ en tout point x en lequel f est continue. On retombe sur la définition usuelle lorsque f est continue sur son domaine de définition tout entier.

Proposition 2

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et a et b deux points de I .

- Les primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante, et pour tout réel $c \in [a; b]$

$$x \mapsto \int_c^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en c .

- Pour toute primitive F de f , on a $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Corollaire 1

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tous $x, y \in [a; b]$,

$$f(x) - f(y) = \int_x^y f'(t) dt \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| \leq \sup_{[x; y]} |f'| \cdot |x - y|$$

En particulier, f est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée sur I .

Exercice 2 (Centrale)

Soit $\Phi : s \mapsto \int_0^s \text{ch}(t^2) dt$.

1. Etudier et représenter Φ .
2. Montrer que Φ est bijective, puis que pour tout x , il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_x^y \text{ch}(t^2) dt = 1$$

On note alors $\varphi(x) = y$.

3. Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2 (Intégration par parties)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ avec f continue et g de classe $\mathcal{C}^1$. Si F est une primitive de f , alors

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = [F(t)g(t)]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t) dt$$

Théorème 3 (Changement de variable)

Soit $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue avec $\varphi([a; b]) \subset J$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} h(t)dt = \int_a^b (h \circ \varphi)(u) \cdot \varphi'(u) du$$

Exercice 3 (Irrationalité de e (et un peu plus) - Centrale)

Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$. On pose $P_n = X^n(a - bX)^n/n!$ pour tout entier n puis

$$I_n = \int_0^{a/b} P_n(t) e^t dt$$

1. Montrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$ sont dans $\mathbb{Z}$ pour tout entier k .
2. Déterminer la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. On suppose que $e^{a/b} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $qI_n \in \mathbb{Z}$.
4. Déterminer les rationnels r tels que e^r soit rationnel.

Théorème 4 (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit I un intervalle et $a \in I$. Si $f : I \rightarrow F$ est continue sur I , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et si f' a une limite finie ℓ en a , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Corollaire 2

Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et f une fonction continue sur I de classe $\mathcal{C}^p$ sur $I \setminus a$. Si pour tout entier $r \leq p$, $f^{(r)}$ a une limite finie en a , alors f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I .

Exercice 4 (Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact)

Notons

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} f(x)$$

2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. Donner un exemple de fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive sur $] -1; 1[$ et nulle en dehors de $[-1; 1]$.

Formules de Taylor
Théorème 5 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a; b]$ à valeurs dans F . Alors,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Théorème 6 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\|\cdot\|$ une norme sur F . Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a; b]$ à valeurs dans F , alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a; b]} \|f^{(n+1)}(t)\|$$

Théorème 7 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a - \delta; a + \delta[$ à valeurs dans F , alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Exercice 5 (Centrale)

Déterminer la limite lorsque x tend vers 0^+ de $\int_x^{2x} \frac{\tan t}{t^2} dt$.

Exercice 6 (X PC 2016)

On considère

$$f : [e; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{\ln x}$$

Montrer que f induit une bijection de $[e; +\infty[$ sur $[e; +\infty[$. Déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

2.1 Définitions (intervalle semi-ouvert)

Définition 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f : [a; b[\longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)dt$$

est convergente, ou encore que f admet une intégrale impropre sur $[a; b[$ si $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ a une limite en b . Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale impropre est divergente.

On a des définitions similaires pour $f :]a; b] \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $-\infty \leq a < b$ suivant la convergence ou la divergence en a de $x \longmapsto \int_x^b f(t)dt$

Exemple 2

Dans tous les exemples qui suivent (et la plupart du temps), on justifie facilement la continuité des fonctions intégrées (ne pas oublier de le dire).

- $x \longmapsto \exp(-x)$ est continue sur $[0; +\infty[$ et l'on a

$$\int_0^x e^{-t}dt = 1 - \exp(-x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ existe et vaut 1.

- $x \longmapsto 1/\sin(x)$ est continue sur $]0; \pi/2]$ et l'on a

$$\int_x^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}dt = [\ln \tan(t/2)]_x^{\pi/2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

donc l'intégrale impropre $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}dt$ est divergente.

- L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \sin t dt$ est divergente.

Proposition 3

Soit $f : [a; b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux avec a, b réels. Si f a une limite finie en b , alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Remarque 5

On dit dans ce cas que l'intégrale est faussement impropre. Si $b = +\infty$, le résultat ne s'applique plus. Toutefois,

- Si f a une limite non nulle en $+\infty$, l'intégrale diverge.
- Si f tend vers 0 en $+\infty$, on ne peut pas conclure.

Proposition 4

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b \leq +\infty$ et $f : [a; b[\mapsto \mathbb{K}$ continue par morceaux. On considère $c \in [a; b[$. Alors, les intégrales impropres

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)dt$$

sont de mêmes natures. De plus, si elles convergent, alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Remarque 6

- La nature d'une intégrale impropre ne dépend que du comportement local de f au voisinage des bornes de l'intervalle.
- Étant donné $f :]a; b] \mapsto \mathbb{K}$, l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f telle que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

Proposition 5

Soit $f : [a; b[\mapsto \mathbb{R}_+$ avec $a < b \leq +\infty$ cpm.

- L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a; b[$. Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)dt = \sup_{x \in [a; b[} \left(\int_a^x f(t)dt \right)$$

- L'intégrale diverge si et seulement si $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt = +\infty$.

Remarque 7

- Les résultats subsistent si f est seulement supposée positive au voisinage de b .
- On a des résultats similaires lorsque f est définie sur $]a; b]$, ou à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.

Proposition 6

Soit $f, g : [a; b[\mapsto \mathbb{R}_+$ cpm avec $a < b \leq +\infty$. On suppose que $f \leq g$ au voisinage de b . Alors

- Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, il en est de même de $\int_a^b f(t)dt$
- Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, il en est de même de $\int_a^b g(t)dt$

2.2 Définitions (intervalle ouvert)

Proposition 7

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f :]a; b[\mapsto \mathbb{K}$ cpm. S'il existe $c \in]a; b[$ tel que les intégrales impropres

$$\int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt$$

convergent, alors pour tout $c' \in]a; b[$, il en est de même des intégrales

$$\int_a^{c'} f(t)dt \text{ et } \int_{c'}^b f(t)dt$$

et la somme des ces deux intégrales est indépendante du choix de c' .

Définition 4

Lorsque les conditions de la proposition précédente sont vérifiées, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

le réel c étant arbitrairement choisi dans $]a; b[$. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

Exemple 3

- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ est divergente (bien que $\int_{-x}^x t dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$).
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Remarque 8

On note de la même manière $\int_a^b f(t)dt$ que f soit définie sur $[a; b]$, $[a; b[$, $]a; b]$, $]a; b[$. Par conséquent, lorsqu'un énoncé demande la nature d'une intégrale, la première chose à faire est de préciser dans lequel de ces 4 cas on se trouve en précisant le domaine de définition de la fonction étudiée.

Proposition 8

Si $f : I \mapsto \mathbb{C}$ est cpm, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt$ convergent, auquel cas

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt$$

2.3 Outils de calcul

Remarque 9

Pour toute fonction F et tous réels a et b , on note $[F]_a^b = \lim_b F - \lim_a F$. En particulier, $[F]_a^b = F(b) - F(a)$ si F est définie en a et en b .

Théorème 8 (IPP sur un intervalle quelconque)

Soient f et g deux applications définies sur un intervalle $I =]a; b[$ et de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f \cdot g$ a une limite finie en a et en b . Alors, les intégrales

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f'(t)g(t) dt$$

sont de mêmes natures, et en cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$$

Théorème 9 (Changement de variable)

Soit $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue, alors

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u) du \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt$$

sont de mêmes natures et, en cas de convergence, elles sont égales.

Remarque 10

Si φ est décroissante, les deux intégrales restent de mêmes natures, mais sont de valeurs opposées en cas de convergence.

Exemple 4

- (X) Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{y^2} \right) dy$?
- (Mines) Convergence et calcul de $\int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$?

3 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

3.1 Convergence absolue

Définition 5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ cpm. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument si $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

Proposition 9

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ cpm. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si et seulement si les deux intégrales $\int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt$ le sont.
- L'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ cpm dont l'intégrale sur I est absolument convergente est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.

Théorème 10

Une intégrale impropre absolument convergente est convergente.

Exemple 5

Les fonctions suivantes ont des intégrales impropres absolument convergentes sur $[1; +\infty[$:

$$f : t \mapsto \sin(t^2) \exp(-\sqrt{t}) \qquad g : t \mapsto e^{it}/t^3$$

Définition 6

Une intégrale improprie convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

3.2 Intégrabilité

Définition 7

Soit $f : I \mapsto \mathbb{K}$ cpm sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est intégrable sur I si elle est continue par morceaux sur I et si son intégrale sur I est absolument convergente (et donc convergente). On la note alors

$$\int_I f \quad \text{ou} \quad \int_I f(t) dt$$

Remarque 11

- Si $I = [a; b[$ (resp. $]a; b]$), on dit également que f est intégrable en b (resp. en a).
- Si I est un segment, toute fonction cpm sur I est intégrable sur I .

Proposition 10

L'ensemble des fonctions $f : I \mapsto \mathbb{K}$ cpm et intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$, que l'on note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$. L'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur cet espace.

Remarque 12

Attention ! Si f et g sont intégrables sur I , on a bien la relation

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$$

mais celle-ci n'a aucun sens si les deux fonctions ne sont pas intégrables sur I . Ainsi, on n'écrit pas

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \left(\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t-1} + \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t+1} \right)$$

Proposition 11 (Inégalité triangulaire)

Pour toute fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$ cpm et intégrable sur I , on a

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

Proposition 12

Si f est continue, intégrable et positive sur I , alors $\int_I f = 0$ si et seulement si f est nulle.

3.3 Théorème de comparaison

Théorème 11 (Théorème de comparaison)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f et g définies sur l'intervalle $I = [\alpha; \beta[$ et continues par morceaux.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow \beta}(g(x))$, alors l'intégrabilité de g en β implique celle de f en β .
- Enfin si $f(x) \sim_{x \rightarrow \beta} g(x)$, alors l'intégrabilité de f en β est équivalente à celle de g en β .

Remarque 13

Le résultat se généralise à un intervalle quelconque. S'il est ouvert à gauche et à droite, on peut bien entendu utiliser des fonctions de comparaison différentes à chaque borne.

Exercice 7 (Intégration des relations de comparaisons)

Soient $f, g : [a; b[\mapsto \mathbb{R}_+$. On suppose que $f = o(g)$ au point b et que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge. Justifier qu'il en est de même de $\int_a^b g(t)dt$ avec au point b

$$\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

Démontrer des résultats similaires si $f = O(g)$ ou si $f \sim g$, et des résultats de même nature sur les restes $\int_x^b f(t)dt$ et $\int_x^b g(t)dt$ lorsque $\int_a^b g(t)dt$ converge.

3.4 Fonctions de références

Proposition 13

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'application $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'application $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha < 1$.
- Plus généralement, pour tout réel a , l'application $t \mapsto 1/|t-a|^\alpha$ est intégrable en a^+ ou en a^- si et seulement si $\alpha < 1$.

Remarque 14

On prendra bien garde au fait que dans le premier cas, la borne est infinie tandis qu'elle est finie (réelle) dans les deux suivants.

Corollaire 3

- Soit $f :]0; 1[\mapsto \mathbb{R}$ continue par morceaux
 - S'il existe $k \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \sim k/t^\alpha$ en 0, alors f est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$.
 - S'il existe $\alpha < 1$ tel que $f(t) = O(1/t^\alpha)$ en 0, alors f est intégrable en 0.
 - S'il existe $\alpha \geq 1$ et $k > 0$ tel que $f(t) \geq k/t^\alpha$ au voisinage de 0, alors f n'est pas intégrable en 0.
- Soit $f : [1; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continue par morceaux.
 - S'il existe $k \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \sim k/t^\alpha$ en $+\infty$, alors f intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
 - S'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(t) = O(1/t^\alpha)$ en $+\infty$, alors f intégrable en $+\infty$.
 - S'il existe $\alpha \leq 1$ et $k > 0$ tel que $f(t) \geq k/t^\alpha$ au voisinage de $+\infty$, alors f n'est pas intégrable en $+\infty$.

Remarque 15

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge.

Proposition 14

La fonction $\ln$ est intégrable sur $]0; 1]$.

Remarque 16

Il en est de même de $t \mapsto |\ln t|^\alpha$ pour tout réel α , mais si l'on s'en réfère au programme, seul le cas $\alpha = 1$ peut être utilisé directement sans justification supplémentaire. Pour les autres cas, il faut appliquer le théorème de comparaison.

Proposition 15

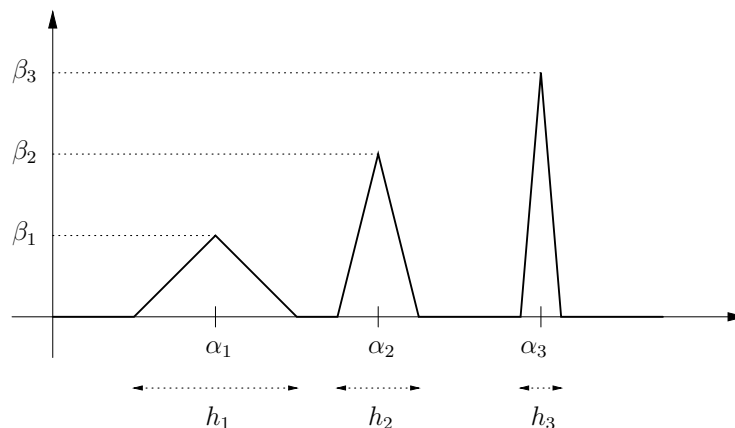
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \exp(-\alpha t) dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Exemple 6

- Nature de $\int_0^1 |1 - x^a|^b dx$ en fonction des réels $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$?
- Nature de $\int_0^1 |\cos(\ln t)| dt$?

Remarque 17

Les exemples de Riemann montrent que le fait que f soit de limite nulle en $+\infty$ n'implique pas nécessairement la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$. La réciproque est également fautive, comme le montre l'exemple suivant :



La fonction ainsi représentée est affine par morceaux. Il suffit de choisir par exemple

$$\alpha_n = n \quad \beta_n = 2^n \quad h_n = 1/4^n$$

pour obtenir une fonction qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge puisque

$$\forall x \geq 0 \quad \int_0^x f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$$

On peut remarquer que f n'est même pas bornée. Elle est seulement continue, mais on peut facilement en construire une qui soit de classe $\mathcal{C}^k$ pour k arbitraire dans $\mathbb{N}$, voire même $\mathcal{C}^\infty$ mais c'est plus dur !

Exercice 8 (Fonction Gamma d'Euler ♡)

Sous réserve de convergence de l'intégrale, on note

$$\Gamma : \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

- Déterminer le domaine de définition de Γ .
- Calculer les valeurs de $\Gamma(n)$ et $\Gamma(n - 1/2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 (Intégrales de Bertrand ♡)

Soit α et β deux réels. Nature des intégrales

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} dt$$

Exercice 10 (Intégrales semi-convergentes ♡)

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$?
- (Centrale) Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} (\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x}) dx$.

3.5 Complément : retour sur la comparaison série-intégrale

On rappelle que la comparaison série-intégrale se base sur l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$$

pour une fonction continue et décroissante pour en déduire la nature de la série $\sum f(n)$. Cette technique peut néanmoins se généraliser pour des fonctions quelconques. Il suffit de considérer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$$

Notons que pour tout entier n , par relation de Chasles

$$\sum_{k=0}^n w_k = \int_0^{n+1} f(t) dt - \sum_{k=0}^n f(k)$$

Lorsque la série $\sum_{n \geq n_0} w_n$ est convergente, on peut donc en déduire que la nature de la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ est égale à celle de la suite

$$\left(\int_0^{n+1} f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

En particulier, elle converge si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Pour justifier la convergence de $\sum_{n \geq n_0} w_n$, on pourra alors écrire lorsque f est $\mathcal{C}^1$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t) dt$$

Exercice 11

Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

4 Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème 12 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$. On fait les hypothèses suivantes :

- (i) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite f continue par morceaux sur I .
- (ii) Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq \varphi$$

Alors, les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la fonction f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I f \quad \text{soit} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

Remarque 18

La propriété (ii) est appelée **hypothèse de domination**. C'est celle qui donne son nom au théorème.

Exemple 7

- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{n}{2\sqrt{x}(1+n^2x)}$$

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle mais $\int f_n(t) dt = \frac{\pi}{2}$ donc ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Exemple 8

Calculons l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ à l'aide de la suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

Exercice 12 (Mines)

Etude et équivalent de $I_n = \int_0^1 \sin(t^n) dt$ quand $n \rightarrow +\infty$?

Théorème 13 (Théorème d'intégration terme à terme)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- La série de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente sur I , de somme continue par morceaux.
- La série $\sum \int_I |f_n|$ est convergente.

Alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et l'on a

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Exemple 9

Calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$. Cette intégrale intervient dans le calcul de la luminance énergétique dans les lois de Planck (corps noir).

Remarque 19

Le théorème est faux si l'on suppose seulement la convergence de $\sum \int_I f_n$ à la place de celle de $\sum \int_I |f_n|$. Pour trouver un contre-exemple, on cherche une suite de fonctions d'intégrale nulle sur I . Par exemple, avec $I = \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n : t \mapsto 2nte^{-nt^2} \quad \text{et} \quad u_n = v_{n+1} - v_n$$

Remarque 20 (Intégration terme à terme par TCD)

Lorsque le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas, on peut poser pour tout entier n ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$$

ce qui nous ramène à justifier que $\int_I S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I S$ ou $\int_I R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On peut alors s'en sortir

- par une majoration directe de $\int_I R_n$.
- par une application du théorème de convergence dominée à l'une des suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 10

Pour tout réel x , on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t + 1} dt$$

Exprimer f sous la forme d'une série. On prouvera que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + x^2}$$

5 Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Dans toute cette partie, on considère I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$. Sous réserve d'existence, on pose

$$\begin{aligned} g : A &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \int_I f(x, t) dt \end{aligned}$$

L'application g est définie en tout point $x \in J$ telle que l'intégrale impropre soit convergente. On cherche des conditions sur f pour garantir la continuité, puis la dérivabilité et le caractère $\mathcal{C}^k$ de g sur son domaine de définition. On conserve ces notations dans tout le chapitre.

5.1 Continuité

Théorème 14 (Théorème de continuité)

On fait les hypothèses suivantes :

- (i) Pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A .
- (ii) Pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- (iii) Il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors l'application g est définie et continue sur A .

Remarque 21

Comme pour le théorème de convergence dominée, l'hypothèse (iii) est appelée hypothèse de domination.

Exemple 11 (Importance de l'hypothèse de domination)

On considère les applications

$$f : \mathbb{R} \times]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt$$

$$(x, t) \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2}$$

On vérifie facilement que (i) et (ii) sont vérifiées. Mais g n'est pas continue en 0 car

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0 \quad g(x) = \arctan(1/x)$$

Corollaire 4 (Domination locale)

On conserve les hypothèses (i) et (ii) mais on remplace (iii) par

- (iii) Pour tout segment $A' \subset A$, il existe une fonction $\varphi_{A'} : I \mapsto \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, intégrable sur I et telle que

$$\forall (x, t) \in A' \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi_{A'}(t)$$

Alors, la conclusion est inchangée : g est continue sur A .

Exemple 12

La fonction Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 22

Si I et A sont des segments et si f est continue, alors les hypothèses (i), (ii) et (iii) sont toujours vérifiées et g est continue.

Exemple 13

Fonction J_0 de Bessel :

$$J_0 : x \mapsto \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta$$

5.2 Limites

Théorème 15 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu)

Soit a une borne de A . On fait les hypothèses suivantes :

- (i) Pour tout $t \in I$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$.
- (ii) Pour tout $x \in A$, les applications $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I .
- (iii) Il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors l'application ℓ est intégrable sur I et

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt$$

Exercice 13 (Centrale)

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$$

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est continue sur D .
- Si $x \in D$, montrer que $1 - x \in D$ et que $f(1 - x) = f(x)$.
- Donner un équivalent de f aux bornes du domaine de définition.

5.3 Dérivabilité

Théorème 16 (Théorème de dérivation)

On fait les hypothèses suivantes

- (i) Pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .
- (ii) Pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
- (iii) Pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- (iv) Il existe une application $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Remarque 23

On remarquera dans cet énoncé que seule une hypothèse de domination **sur la dérivée partielle** est nécessaire. Il n'y en a pas besoin pour la fonction f elle-même.

Exemple 14 (Importance de l'hypothèse de domination)

L'application suivante est continue mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + t^2} dt$$

Corollaire 5 (Domination locale)

On conserve les hypothèses du théorème précédent à l'exception de (iv) remplacée par

- (iv) Pour tout segment $A' \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A' \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la conclusion reste inchangée.

Corollaire 6 (Extension aux fonctions $\mathcal{C}^k$)

On fait les hypothèses suivantes

- (i) Pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A .
- (ii) Pour tout $x \in A$, pour tout $j < k$, l'application $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
- (iii) Pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- (iv) Il existe une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors l'application g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$\forall p \in \llbracket 1; k \rrbracket, \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) dt$$

Remarque 24

- On remarquera que dans ce corollaire, il suffit d'avoir une domination sur la k -ième dérivée partielle de f par rapport à x (indépendante de x), pas des autres.
- A nouveau, on peut se contenter d'une domination sur tout segment $A' \subset A$ pour conclure.

Exemple 15

- La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction J_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0$$

5.4 Compléments : transformée de Fourier et de Laplace

Définition 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On appelle transformée de Fourier de f l'application

$$\widehat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} dt$$

Remarque 25

- La fonction $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée par $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$.
- S'il existe un entier k tel que $t \mapsto t^k f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\widehat{f}(x) = O\left(\frac{1}{x^k}\right)$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Exercice 14 (Transformée de Fourier de la Lorentzienne)

Pour tout réel x , on introduit les quatre quantités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt & g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt \\ h(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt & k(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt \end{aligned}$$

1. Justifier que ces quantités sont toutes définies en tant qu'intégrales impropres convergentes.
2. Prouver que pour tout réel x , $xf(x) = 2h(x)$.
3. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que $h' = f - k$.
4. Montrer que k est également $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que $k' = -h$.
5. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et que $f'' = f$.
6. Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}$$

Définition 9

Notons E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux et telles que $t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $\alpha > 0$. La transformée de Laplace d'un élément f de E est l'application définie par

$$\mathcal{L}(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

Remarque 26

- L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même qui contient :
 - les fonctions polynomiales
 - les fonctions bornées
 - les fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$

Il est stable par multiplication par un polynôme.

- Une transformée de Laplace est une application continue de limite nulle en $+\infty$.
- Si f est (par exemple) continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{L}(f)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.