

Valeurs propres, vecteurs propres

1 _____ (*) _____

Soit α, β deux complexes. Déterminer le polynôme caractéristique des matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \alpha & 0 & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \alpha + \beta & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \beta & 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & & (0) & & \ddots & \beta \\ & \ddots & & & \ddots & \\ (0) & & \alpha & \beta & & (0) \\ & & \beta & \alpha & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \beta & & (0) & & \ddots & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

2 _____ (**) _____

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3 _____ (*) _____ **CCP PC 2019**

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et Φ définie sur E par

$$\forall f \in E, \quad \Phi(f) : x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

- (a). (i) Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
 (ii) Soit $g \in \text{Im } \Phi$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Que peut-on en déduire sur Φ ?
 (b). Déterminer les valeurs propres de Φ .

4 _____ (*) _____

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et v un élément de E non nul. On note

$$E_v = \{u \in \mathcal{L}(E), \quad v \text{ est vecteur propre de } u\}$$

Montrer que E_v est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.

5 _____ (***) _____

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.

- (a) Montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.
 (b) En déduire l'existence de $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux triangulaires supérieures.

Diagonalisabilité

6 _____ (*) _____

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(P) = (X+2)P(X) - (X+1)P(X+1)$

Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable? Déterminer enfin le rang de u et son noyau.

7 _____ (**) _____ **CCP PC 2009**

Soit J l'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et f l'application définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = JM - MJ$$

- (a). Montrer que f est un endomorphisme et déterminer sa matrice respectivement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 (b). L'endomorphisme f est-il diagonalisable? Déterminer ses valeurs propres et les espaces propres associés.
 (c). Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.

(d). Soit B un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $f(M) = B$ d'inconnue M .

8 _____ (*) _____

(a). Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le premier des deux déterminants suivant et en déduire la valeur du second :

$$D_n(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ (0) & & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} \quad P_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

(b). Soit $z \in \mathbb{C}$. La matrice suivante est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

$$A_z = \begin{pmatrix} z & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & z \end{pmatrix}$$

9 _____ (**) _____ **X PC 2019**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E de rang 1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

10 _____ (**) _____

Montrer que si f est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie, alors $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires. La réciproque est-elle vraie ?

11 _____ (**) _____

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit alors

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

(a). Montrer que si λ est valeur propre de f , elle est valeur propre de φ_f et déterminer la dimension de $E_\lambda(\varphi_f)$ en fonction de celle de $E_\lambda(f)$.

(b). Que peut-on en déduire si f est diagonalisable ?

12 _____ (**) _____ **Mines PC 2016**

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ f$ est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

13 _____ (**) _____ **X PC 2010**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si pour tout polynôme non constant P , on peut trouver $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $A = P(M)$.

Equations matricielles

14 _____ (**) _____ **CCP PC 2013**

Soit A un élément non nul de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A^3 = -A$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A .

(a). Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } (u^2 + I_d)$.

(b). Montrer que A est semblable à $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c). Donner la dimension et une base de $C(A)$.

(d). Résoudre l'équation $X^6 + X^2 = 0$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

15 _____ (**) _____ **X PC 2010**

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Divers

16 _____ (**) _____

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{a^2}{n^2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n$$

17 _____ (*) _____ **X PC 2016**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer la dimension de $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AB = BA\}$.

18 _____ (**) _____ **Centrale PC 2008**

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que A et A^2 soient semblables. On exprimera le résultat sous la forme $A = PBP^{-1}$ avec P inversible arbitraire et B la plus simple possible.

19 _____ (**) _____ **X PC 2010**

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

20 _____ (***) _____ **X PC 2010**

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = f + g$.

- Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ et $\text{Im } f = \text{Im } g$.
- On suppose f et g diagonalisables. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R} \setminus]0; 4[$.

Exercices supplémentaires non corrigés

21 _____ (*) _____ **Mines PC 2024**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $A^{2^n} = I_2$. Montrer que $A^2 = I_2$ ou bien qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^k} = -I_2$.

22 _____ (?) _____ **X PC 2024**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB soit diagonalisable.

- La matrice BA est-elle diagonalisable ?
- Montrer que $\dim \text{Ker } AB \leq \dim \text{Ker } B(AB)A \leq \dim \text{Ker } A(BABA)B \leq \dim \text{Ker } AB$
- La matrice $(BA)^2$ est-elle diagonalisable ?

23 _____ (**) _____ **Centrale PC 2024**

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

- La matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
- Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A l'est.

24 _____ (?) _____ **ENS PC 2024**

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{pmatrix}$

Montrer que la matrice A_n admet $(n+1)$ valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ d'ordres respectifs $\binom{n}{k}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

- 1** On pourra déterminer des valeurs propres évidentes et en déduire la liste complète.
- 2** Résoudre le système $AX = \lambda X$ en fonction de la valeur de λ .
- 3** (b) Dériver l'égalité $\Phi(f) = \lambda f$ pour se ramener à une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- 4** Compléter $\{v\}$ en une base de E et raisonner sur la forme de la matrice de $u \in E_v$ respectivement à cette base.
- 5** (a) Raisonner sur l'endomorphisme induit par B sur $\text{Im } B$.
(b) Procéder par récurrence sur n .
- 6** On pourra considérer la matrice de u dans la base canonique.
- 7** (a) Noter $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ puis calculer $f(M)$. En déduire les images des matrices élémentaires $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$ puis la matrice demandée (de taille 4).
(b) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice obtenue à la question (a) et vérifier qu'il est scindé sur $\mathbb{R}$ (avec des racines entières).
(c) Pour obtenir une base de $\text{Im } f$, prendre une base de vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles.
(d) Noter $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Commencer par déterminer une condition sur a , b , c et d pour que B appartienne à $\text{Im } f$. Déterminer ensuite un antécédent quelconque de B , puis tous les antécédents à l'aide de $\text{Ker } f$.
- 8** (a) Déterminer une formule de récurrence satisfaite par $D_n(\alpha, \beta)$. Remarquer que $P_n(\theta)$ n'est qu'un cas particulier du premier.
(b) Déterminer n complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts tels que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $A_z - \lambda_k I_n$ soit non inversible.
- 9** Calculer le polynôme caractéristique de u en travaillant dans une base adaptée à $\text{Ker } u$.
- 10** Comparer les espaces propres de f aux espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
Pour la réciproque, raisonner à l'aide d'un élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ bien choisi.
- 11** (a) Etant donné λ une valeur propre de A , à quelle condition portant sur $\text{Im } g$ l'endomorphisme g appartient-il à $\text{Ker}(\varphi - \lambda I_{d\mathcal{L}(E)})$?
- 12** Commencer par justifier que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ si et seulement si $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
Passer ensuite par les polynômes annulateurs et utiliser le fait que tout complexe non nul admet deux racines carrées distinctes.
- 13** Utiliser les formes réduites des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- 14** (b) Justifier que $\dim \text{Ker}(u^2 + I_d) = 2$.
(d) Remarquer que si X est solution, alors $A = X^2$ vérifie $A^3 = -A$ et X commute avec A .
- 15** Noter $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Remarquer alors que A et J commutent et que J est diagonalisable.
- 16** En distinguant les 2 cas $a = 0$ et $a \neq 0$, on cherchera une forme réduite dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la matrice et on justifiera que

$$\left(1 + \frac{ia}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(ia)$$
- 17** Ne surtout pas se précipiter sur le moindre calcul, c'est inutile. Remarquer que A a 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. Justifier ensuite qu'une matrice diagonale ayant des valeurs propres deux à deux distinctes ne commute qu'avec des matrices diagonales.
- 18** Utiliser les formes réduites des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- 19** Raisonner sur l'endomorphisme induit sur le sous-espace stable.
- 20** (a) Justifier deux inclusions puis conclure avec un argument de dimension.
(b) Choisir une base de diagonalisation de f et justifier en passant par les matrices qu'elle diagonalise automatiquement g . Pour le résultat sur le spectre, justifier que si deux réels a et b vérifient $a + b = ab$, alors $ab \notin]0; 4[$.