III L'identité d'Euler

Dans cette partie, nous allons établir l'identité d'Euler suivante :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{III.1}$$

On désigne par $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t\in]0,n[\\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$

et on définit pour tout réel $x > 0$ les suites $(I_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(J_n(x))_{n\geqslant 0}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt$$

III.A – Montrer que pour tout entier n, $n \geqslant 1$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

III.B – Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$$

III.C – Montrer que, pour tout entier n, $n \geqslant 0$,

$$\forall x > 0, \qquad J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

III.D – En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$$

III.E – Établir l'identité d'Euler (**III.1**).

IV Une intégrale à paramètre

Dans toute la suite, on définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto u - [u] - 1/2$$

où la notation $[u]$ désigne la partie entière de u.

IV.A – Dessiner soigneusement le graphe de l'application h sur l'intervalle $[-1,1]$.

IV.B – Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$$

est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et périodique de période 1.

IV.C – À l'aide d'une intégration par parties, justifier, pour $x > 0$, la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

IV.D – L'application $u \longmapsto \dfrac{h(u)}{u+x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

IV.E – Soit φ l'application définie pour tout $x > 0$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

En reprenant l'intégration par parties de la question **IV.C**, démontrer que l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\,du$$

V Une autre identité due à Euler

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler, valable pour tout $x > 0$:

$$\ln\Gamma(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\,du$$

où h est l'application définie à la partie **IV**.

On fixe donc $x > 0$ et pour tout entier naturel n, on définit $F_n(x)$ par :

$$F_n(x) = \ln\left(\frac{n!n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}\right)$$

V.A – Montrer que pour tout entier naturel i :

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t\,dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\,du$$

V.B – En déduire que :

$$F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

où

$$G_n(x) = \ln n! + (x+1)\ln n - \left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + n + 1 + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x$$

V.C –

V.C.1) En utilisant la formule de Stirling, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi}$$

V.C.2) En déduire que :

$$\ln\Gamma(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

V.D – Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\,du$$