# III Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in ]0, 1[ \text{ et } q = 1 - p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.

L'abscisse $S_n$ du point à l'issue du $n$-ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geqslant 2$, quel que soit l'entier $k$ compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\sum_{i=k+1}^{n} Y_i$ suivent la même loi.

On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.

On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (i.e. $S_k = 0$) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (i.e. $k = 2n$).

On introduit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \quad \text{et} \quad b_n = \mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\big)$$

et les séries entières

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

***III.A*** –

**Q 23.** Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X_1 + 1)$ ? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable $S_n$.

**Q 24.** Écrire une fonction Python qui prend en argument le nombre $n$ de lancers et renvoie le nombre de retours au point à l'origine.

> On pourra utiliser la fonction Python `random.random()` qui renvoie un nombre flottant pseudo-aléatoire dans l'intervalle $[0, 1[$.

**Q 25.** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

**Q 26.** En déduire le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum a_n x^{2n}$.

**Q 27.** Pour quelles valeurs de $p$ l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$ ?

**Q 28.** En utilisant le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ déterminer une expression de $A(x)$.

***III.B*** –

**Q 29.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en décomposant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

**Q 30.** En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de $x$ elle est valable.

**Q 31.** Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ pour $x$ dans un intervalle à préciser.

**Q 32.** Pour quelles valeurs de $p$ l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$ ? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?

***III.C –***

**Q 33.** En déduire que la probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à $|p - q|$.