I. Généralités, cas particuliers

$\boxed{1}$ Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Utilisons le critère de d'Alembert. Comme $(p\,n)^r\,/\,(p\,n)\,!$ ne s'annule pour aucune valeur de n, on peut écrire

$$\frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))\,!} \times \frac{(p\,n)\,!}{(p\,n)^r} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \times \frac{(p\,n)\,!}{(p(n+1))\,!}$$

Or,
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^r \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et
$$\frac{(p\,n)\,!}{(p(n+1))\,!} = \frac{1}{(p\,n+1)\times\cdots\times(p\,n+p)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{car } p \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert,

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } r \in \mathbb{R}_+^*, \text{ le rayon de la série entière } \textstyle\sum_{n\geqslant 1} (p\,n)^r\,/\,(p\,n)!\,z^n \text{ est infini.}}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, comme la série $\sum a_n\,z^n$ converge absolument sur $\mathbb{C}$, il y a également convergence absolue de $\sum a_n\,z^{pn}$. Ainsi, la série $\sum a_n\,z^{pn}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc le rayon de convergence de cette série entière est infini. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } r \in \mathbb{R}_+^*, \text{ le rayon de la série entière } \textstyle\sum_{n\geqslant 1} (p\,n)^r\,/\,(p\,n)!\,z^{pn} \text{ est infini.}}$$

> Plus généralement, si R désigne le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\,z^n$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\,z^{pn}$ vaut $\sqrt[p]{\mathrm{R}}$. Ce résultat est valable pour $\mathrm{R} = +\infty$ si l'on convient que $\sqrt[p]{+\infty} = +\infty$.

$\boxed{2}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1, on peut écrire

$$\mathrm{S}_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^0}{n\,!}\,x^n$$

d'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_{0,1}(x) = \mathrm{e}^{\,x} - 1}$$

De même, la question 1 permet d'affirmer l'existence de la somme infinie

$$\mathrm{S}_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^0}{(2n)\,!}\,x^{2n}$$

puis
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_{0,2}(x) = \mathrm{ch}\,(x) - 1}$$

> Rappelons les sommes de séries entières suivantes, valables pour tout $z \in \mathbb{C}$:
> $$\mathrm{e}^{\,z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n\,!} \qquad \mathrm{ch}\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)\,!} \qquad \mathrm{sh}\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$$

De plus, on a les équivalents suivants :

$$\mathrm{e}^{\,x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\,x} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}\,(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\,x}}{2}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{Les énoncés } \mathrm{H}_{0,1} \text{ et } \mathrm{H}_{0,2} \text{ sont valides.}}$

III. Démonstration de $\mathrm{H}_{r,p}$ pour $p \geqslant 2$

$\boxed{10}$ Commençons par remarquer que, pour tout $x > 0$, l'application φ_x est bien définie sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Étudions les variations de φ_x sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Soit $t > 1$,

$$\begin{aligned}\varphi_x'(t) &= (1-r)t^{-r}(t-1)^r + t^{1-r}r(t-1)^{r-1}\\ &= t^{-r}(t-1)^{r-1}\left((1-r)(t-1)+r\,t\right)\\ \varphi_x'(t) &= t^{-r}(t-1)^{r-1}(t-1+r)\end{aligned}$$

Comme $t > 1$ et $r > 0$, φ_x est strictement croissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$. De surcroît,

$$\varphi_x(1) = -x = \lim_{t\to 1}\varphi_x(t)$$

Ainsi, comme $x > 0$, $\varphi_x(1) < 0$ et, par continuité et stricte croissance de φ_x, le théorème de la bijection permet d'affirmer :

$$\boxed{\text{Il existe un unique } t_x \in\,]\,1\,;+\infty\,[\text{ tel que } \varphi_x(t_x) = 0.}$$

Par conséquent, $\qquad \forall t \geqslant t_x \qquad \varphi_x(t) \geqslant 0$

Recherchons à présent les variations de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour ce faire, calculons la différence $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$, en faisant apparaître la fonction φ_x lors des calculs :

$$\begin{aligned}u_{n+1}(x) - u_n(x) &= \frac{(n+1)^r}{(n+1)\,!}\,x^{n+1} - \frac{n^r}{n\,!}\,x^n\\ &= \frac{x^n}{n\,!}\left(\frac{(n+1)^r}{n+1}\,x - n^r\right)\\ &= \frac{x^n}{n\,!}\left((n+1)^{r-1}\,x - n^r\right)\\ &= \frac{-x^n\,(n+1)^{r-1}}{n\,!}\left(n^r(n+1)^{1-r} - x\right)\\ u_{n+1}(x) - u_n(x) &= \frac{-x^n\,(n+1)^{r-1}}{n\,!}\,\varphi_x(n+1)\end{aligned}$$

Or, $\varphi_x(n+1) \leqslant 0$ pour $n+1 \leqslant t_x$ et donc pour $n+1 \leqslant \lfloor t_x \rfloor$. De même, si $n+1 \geqslant \lfloor t_x \rfloor$, on a $\varphi_x(n+1) \geqslant 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite finie } (u_n(x))_{n\in[\![\,0\,;\,\lfloor t_x\rfloor\,]\!]} \text{ est croissante}\\ \text{et la suite } (u_n(x))_{n\geqslant\lfloor tx\rfloor} \text{ est décroissante.}\end{array}}$$

$\boxed{11}$ Notons que l'expression $\varphi_x(x+\alpha)$ n'a de sens que si $x + \alpha \geqslant 1$. Or, étant donné que l'on en cherche ici la limite quand x tend vers $+\infty$, on peut supposer x suffisamment grand pour que l'expression $\varphi_x(x+\alpha)$ soit bien définie. D'après les calculs menés à la question 10, on a, pour $x > 1 - \alpha$,

$$\begin{aligned}\varphi_x(x+\alpha) &= \mathrm{e}^{\,r\ln\left(1-\frac{1}{x+\alpha}\right)+\ln(x+\alpha)} - x\\ &= (x+\alpha)\,\mathrm{e}^{\,r\ln\left(1-\frac{1}{x+\alpha}\right)} - x\\ \varphi_x(x+\alpha) &= x\left(\mathrm{e}^{\,r\ln\left(1-\frac{1}{x+\alpha}\right)} - 1\right) + \alpha\,\mathrm{e}^{\,r\ln\left(1-\frac{1}{x+\alpha}\right)}\end{aligned}$$

Or, $$\lim_{x\to+\infty} \ln\Big(1-\frac{1}{x+\alpha}\Big) = 0$$
vu la continuité du logarithme en 1, donc par continuité de l'exponentielle en 0,
$$\alpha\,\mathrm{e}^{\,r\ln\left(1-\frac{1}{x+\alpha}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha$$
Il reste à calculer la limite du terme de gauche. On a
$$\ln\Big(1-\frac{1}{x+\alpha}\Big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
donc $$\mathrm{e}^{\,r\ln\left(1-\frac{1}{x+\alpha}\right)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} r\,\ln\Big(1-\frac{1}{x+\alpha}\Big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-r}{x+\alpha}$$
puis $$x\big(\mathrm{e}^{\,r\ln\left(1-\frac{1}{x+\alpha}\right)} - 1\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-r\,x}{x+\alpha} \underset{x\to+\infty}{\sim} -r$$
Ainsi, $$\boxed{\forall\alpha\in\mathbb{R} \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi_x(x+\alpha) = \alpha - r}$$

> Il faut être très précautionneux lors de ce genre de calculs. Signalons quelques erreurs à ne pas commettre dans cette question.
>
> - Ajouter des équivalents : il ne faut jamais le faire ! On pourra méditer le mauvais exemple suivant :
>
> $$x+\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \qquad \text{et} \qquad -x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$$
>
> - Surinterpréter les petits « o » : comme $\mathrm{e}^{\,r\,\ln\left(1-\frac{1}{x+\alpha}\right)}\,(x+\alpha) \underset{x\to+\infty}{\sim} x+\alpha$, on trouve
>
> $$\varphi_x(x+\alpha) = \alpha + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x)$$
>
> On ne peut donc pas conclure quant à la limite de $\varphi_x(x+\alpha)$.

Procédons maintenant comme le suggère l'indication et montrons que
$$t_x - x - r \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
en revenant à la définition d'une limite. Considérons donc $\varepsilon > 0$. Remarquons d'après le début de la question que
$$\varphi_x(x+r+\varepsilon) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \varphi_x(x+r-\varepsilon) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\varepsilon$$
Ainsi, $$\exists \mathrm{A}>0 \quad \forall x>\mathrm{A} \qquad \varphi_x(x+r+\varepsilon) > 0$$
soit $$\exists \mathrm{A}>0 \quad \forall x>\mathrm{A} \qquad x+r+\varepsilon \geqslant t_x$$
ceci car φ_x est croissante et s'annule uniquement en t_x. De même,
$$\exists \mathrm{A}'>0 \quad \forall x>\mathrm{A}' \qquad x+r-\varepsilon \leqslant t_x$$
Ainsi, en considérant $\mathrm{A}'' = \mathrm{Max}\,(\mathrm{A},\mathrm{A}')$, on a
$$\forall x>\mathrm{A}'' \qquad \begin{cases} x+r+\varepsilon \geqslant t_x \\ x+r-\varepsilon \leqslant t_x \end{cases}$$
donc $$\forall x>\mathrm{A}'' \qquad |t_x - x - r| < \varepsilon$$
Finalement, on a établi que
$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists \mathrm{A}''>0 \quad \forall x>\mathrm{A}'' \qquad |t_x - x - r| < \varepsilon$$
Cela prouve que $$\boxed{\forall r>0 \qquad t_x - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} r}$$

12 Comme à la question 11, faisons remarquer que l'expression $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)$ n'a de sens que lorsque $\lfloor x\rfloor + k \in \mathbb{N}$. Comme on s'intéresse au comportement asymptotique pour x tendant vers $+\infty$, on peut supposer x suffisamment grand pour que $\lfloor x\rfloor+k \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\forall k \geqslant |x|+1 \qquad u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) = \frac{(\lfloor x\rfloor + k)^r\, x^{\lfloor x\rfloor+k}}{(\lfloor x\rfloor + k)\,!}$$

Or, $$(\lfloor x\rfloor + k)^r \underset{x\to+\infty}{\sim} \lfloor x\rfloor^r$$

> Rappelons que l'on peut appliquer une puissance à un équivalent uniquement si l'exposant ne dépend pas de la variable ! Par exemple,
> $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \sim 1 \qquad \text{mais} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$$

Remarquons que $$\lfloor x+k\rfloor = \lfloor x\rfloor + k$$

Dès lors, $$(\lfloor x\rfloor + k)\,! = \lfloor x\rfloor\,! \times (\lfloor x\rfloor + 1) \times \cdots \times (\lfloor x\rfloor + k)$$

d'où $$\lfloor x+k\rfloor\,! \underset{x\to+\infty}{\sim} \lfloor x\rfloor\,! \times \lfloor x\rfloor^k$$

> Voilà comment on peut prouver le résultat suivant
> $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \qquad \lfloor x+k\rfloor = \lfloor x\rfloor + k$$
> Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On a $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ d'où
> $$\lfloor x\rfloor + k \leqslant x + k < \lfloor x\rfloor + k + 1$$
> L'entier $\lfloor x\rfloor + k$ vérifie les inégalités caractéristiques de $\lfloor x+k\rfloor$, donc on a bien $\lfloor x+k\rfloor = \lfloor x\rfloor + k$.

Finalement, $$u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\lfloor x\rfloor^r \times x^{\lfloor x\rfloor} \times x^k}{\lfloor x\rfloor\,! \times \lfloor x\rfloor^k}$$

et puisque $\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, $$u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\lfloor x\rfloor^r \times x^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor\,!}$$

Ainsi, $$\boxed{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x\rfloor}(x)}$$

> Pour établir que $\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, il suffit d'utiliser l'encadrement
> $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x-1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$$
> puis, pour $x > 0$, $$1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leqslant 1$$
> et par encadrement, $$\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

13 On sait grâce à la question 10 que la suite $(u_n(x))_{n\geqslant \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante. Par conséquent, pour x suffisamment grand, $\lfloor x \rfloor - m \geqslant \lfloor t_x \rfloor$, et donc

$$\forall i \in [\![\, \lfloor x \rfloor - m\,;\lfloor x \rfloor\,]\!] \qquad u_i(x) \geqslant u_{\lfloor x \rfloor}(x)$$

donc
$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant (\lfloor x \rfloor - (\lfloor x \rfloor - m) + 1)\, u_{\lfloor x \rfloor}(x)$$
$$\geqslant (m+1) u_{\lfloor x \rfloor}(x)$$

d'où
$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant m\, u_{\lfloor x \rfloor}(x)$$

Puisque $u_{\lfloor x \rfloor}(x) \geqslant 0$, il en résulte que

$$\boxed{\text{Pour tout } m \in \mathbb{N}^*\text{, dès lors que } x \text{ est suffisamment grand, } \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant m\, u_{\lfloor x \rfloor}(x)}$$

Pour ne pas se tromper pour calculer le nombre de termes dans une somme, on peut retenir : « dernier indice moins premier indice plus 1 ».

Voici une solution alternative. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $x > 0$,

$$\frac{1}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} \quad \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) = \sum_{i=-m}^{0} \frac{u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)}$$

Or
$$\frac{u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \qquad \text{(question 12)}$$

Ainsi, la somme suivante converge vers $m+1$ quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{i=-m}^{0} \frac{u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)}$$

Elle est donc supérieure à m pour x assez grand, ce qui prouve le résultat.

Il faut enfin être prudent avec la formulation adoptée par l'énoncé. Elle pourrait laisser penser que l'on peut permuter les quantifications sur x et sur m. Or, ce n'est pas garanti puisque x dépend de m.

Majorons enfin :
$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant \frac{1}{m} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \leqslant \frac{1}{m} \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{i^r}{i\,!}\, x^i$$
$$\leqslant \frac{\lfloor x \rfloor^r}{m} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i\,!} \leqslant \frac{x^r}{m} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i\,!}$$

En conclusion,
$$\boxed{u_{\lfloor x \rfloor}(x) \frac{x^r\,\mathrm{e}^{\,x}}{m}}$$

14 L'inégalité obtenue à la question 13 étant valable pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) = \mathop{\mathrm{o}}_{x\to+\infty}(x^r\,\mathrm{e}^{\,r})$$

Par ailleurs, on sait grâce à la question 12 que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad u_{\lfloor x \rfloor}(x) \mathop{\sim}_{x\to+\infty} u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)$$

d'où
$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = \mathop{\mathrm{o}}_{x\to+\infty}(x^r\,\mathrm{e}^{\,r})$$

Remarquons que $\mathrm{M}_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ avec $i = \lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor$. Or, d'après la question 11,

$$t_x - x \xrightarrow[x \to +\infty]{} r$$

> Il ne faudrait surtout pas conclure que $\lfloor t_x - x \rfloor \xrightarrow[x \to +\infty]{} r$. En effet, la fonction « partie entière » n'est pas continue !

Considérons $\varepsilon > 0$. Le fait que $t_x - x \xrightarrow[x \to +\infty]{} r$ implique que, pour x assez grand,

$$t_x \leqslant x + r + \varepsilon$$

d'où
$$\lfloor t_x \rfloor \leqslant t_x \leqslant x + r + \varepsilon$$

puis
$$\lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor \leqslant x - \lfloor x \rfloor + r + \varepsilon \leqslant 1 + r + \varepsilon$$

Ainsi, en posant $\varepsilon = \lfloor r \rfloor - r + 1 > 0$, on obtient, pour x suffisamment grand,

$$\lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor r \rfloor + 2$$

> En fait, on peut faire un peu mieux que ce que suggère l'indication ! Avec
> $$\lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor \leqslant x - \lfloor x \rfloor + r + \varepsilon$$
> et
> $$x < \lfloor x \rfloor + 1$$
> on a
> $$\lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor < 1 + r + \varepsilon$$
> Ainsi, en prenant $\varepsilon = \lfloor r \rfloor - r + 1$, on a $\lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor < \lfloor r \rfloor + 2$. Puisque $\lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor$ et $\lfloor r \rfloor + 2$ sont des entiers,
> $$\lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor r \rfloor + 1$$

Procédons de façon similaire afin de minorer $\lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout x assez grand,

$$t_x \geqslant x + r - \varepsilon \qquad \text{soit} \qquad t_x - x - r \geqslant -\varepsilon$$

Or,
$$\lfloor t_x \rfloor + 1 > t_x$$

d'où
$$\lfloor t_x \rfloor + 1 - x - r > -\varepsilon$$

De même
$$\lfloor x \rfloor \leqslant x$$

donc
$$\lfloor t_x \rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - r > -\varepsilon$$

soit
$$\lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor > r - 1 - \varepsilon$$

Finalement, en prenant $\varepsilon = r - \lfloor r \rfloor + 1$, on a bien $\varepsilon > 0$ et on obtient

$$\lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor > \lfloor r \rfloor - 2 \geqslant \lfloor r \rfloor - 1 \qquad \text{car } \lfloor t_x \rfloor - \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$$

On a donc établi que, pour x assez grand, et d'après les variations de $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ obtenues à la question 10,

$$\mathrm{M}_x \in \left\{ u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \mid i \in [\![\, \lfloor r \rfloor - 1\,;\lfloor r \rfloor + 2\,]\!] \right\}$$

Ainsi,
$$\boxed{\forall r > 0 \qquad \mathrm{M}_x = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}(x^r\, \mathrm{e}^{\,r})}$$

15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons D_n en notant que c'est la somme d'une progression géométrique. Comme $z \neq 1$, on peut écrire

$$\mathrm{D}_n = \frac{1-z^n}{1-z}$$

Par inégalité triangulaire, $$|\mathrm{D}_n| \leqslant \frac{|1-z^n|}{|1-z|} \leqslant \frac{|1|+|z^n|}{|1-z|}$$

puis $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |\mathrm{D}_n| \leqslant \frac{2}{|1-z|}}$$ car $|z| = 1$

> La majoration naïve de la somme avec l'inégalité triangulaire donne une très mauvaise borne : $|\mathrm{D}_n| \leqslant n$. En effet, cette borne dépend de n et cela complique les études de convergence demandées par la suite.

Remarquons que $$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{D}_n\, u_{n-1}(x) \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n\, u_n(x)$$

sont des séries entières de la variable x. Il suffit donc d'établir que leur rayon de convergence vaut $+\infty$. Comme on a établi que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |\mathrm{D}_n| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$$

et que cette borne ne dépend pas de n, les rayons de convergence des séries entières $\sum \mathrm{D}_n\, u_{n-1}(x)$ et $\sum \mathrm{D}_n\, u_n(x)$ sont minorés par le rayon de convergence de la série $\sum u_n(x)$. Or, le rayon de convergence de $\sum u_n(x)$ est $+\infty$ d'après la question 1. Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les séries } \sum \mathrm{D}_n\, u_{n-1}(x) \text{ et } \sum \mathrm{D}_n\mathrm{D}_n\, u_n(x)\\ \text{convergent absolument quel que soit } x > 0.\end{array}}$$

16 D'après la question 15, les quantités manipulées ci-dessous sont bien définies.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{D}_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{D}_{n+1}\, u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{D}_n\, u_n(x)\\
&= \mathrm{D}_1\, u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{D}_{n+1} - \mathrm{D}_n) u_n(x)\\
\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{D}_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n\,!}\,(zx)^n
\end{aligned}$$

Ainsi, $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{D}_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = \mathrm{S}_{r,1}(zx)}$$

> On peut également faire cette question en utilisant des sommes finies. Voici une solution alternative. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.
>
> $$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}_n\,(u_{n-1}(x) - u_n(x)) &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}_n\, u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}_n\, u_n(x)\\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{D}_{n+1}\, u_n(x) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}_n\, u_n(x)\\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} z^n\, u_n(x) + 1 \times u_0(x) - \mathrm{D}_\mathrm{N}\, u_\mathrm{N}(x)\\
\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}_n\,(u_{n-1}(x) - u_n(x)) &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{n^r}{n\,!}\,(x\,z)^n + 0 - \mathrm{D}_\mathrm{N}\, u_\mathrm{N}(x)
\end{aligned}$$

Grâce à la question 15, la série $\sum \mathrm{D}_n\, u_n(x)$ converge (absolument), donc

$$\mathrm{D}_\mathrm{N}\, u_\mathrm{N}(x) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

D'après la question 1, la série $\sum n^r\,(zx)^n/n\,!$ converge. Ainsi, par passage à la limite,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{D}_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = \mathrm{S}_{r,1}(zx)$$

Le procédé calculatoire employé porte le nom de « transformation d'Abel ». Pour une somme du type $\sum u_n(v_{n-1}-v_n)$ la transformation d'Abel fournit une méthode simple pour parvenir à $\sum v_n(u_{n+1}-u_n)$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(v_{n-1}-v_n) &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n\, v_{n-1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n\, v_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} u_{n+1}\, v_n - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n\, v_n \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} (u_{n+1}-u_n)v_n + u_1\, v_0 - u_\mathrm{N}\, v_\mathrm{N}\end{aligned}$$

Noter le transfert du signe « $-$ » des v_n aux u_n !

Majorons maintenant $|\mathrm{S}_{r,1}(zx)|$ pour x assez grand. Commençons par remarquer que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathrm{N}}$ est positive. De plus, on sait grâce à la question 10 qu'elle est croissante jusqu'à $n = \lfloor t_x \rfloor$ puis décroissante. Or, pour x assez grand, on a $\lfloor t_x \rfloor \geqslant 1$ car d'après la question 11,

$$\lfloor t_x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} t_x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

Dès lors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| = \sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor+1}^{+\infty} (u_{n-1}(x) - u_n(x))$$

De plus, $(u_n(x))$ converge et sa limite est positive car $(u_n(x))_{n\geqslant\lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante et positive, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| = u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) - u_0(x) - \lim_{n\to+\infty} u_n(x) + u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$$

Or, $$|\mathrm{D}_n| \leqslant \frac{2}{|1-z|} \qquad \text{(question 15)}$$

Ainsi, $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} |\mathrm{D}_n||u_{n-1}(x) - u_n(x)| &\leqslant \frac{2}{|1-z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \\ &\leqslant \frac{2}{|1-z|}\Big(\mathrm{M}_x - 0 - \lim_{n\to+\infty} u_n(x) + \mathrm{M}_x\Big)\end{aligned}$$

Mais, $$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) \geqslant 0$$

d'où $$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mathrm{D}_n||u_{n-1}(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{M}_x}{|1-z|}$$

Ainsi, pour x assez grand, $$\boxed{\mathrm{S}_{r,1}(zx) \leqslant \frac{4\,\mathrm{M}_x}{|1-z|}}$$

On sait d'après la question 14 que $\mathrm{M}_x = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x^r\,\mathrm{e}^r)$. Le facteur $4/|1-z|$ étant indépendant de x, cela entraîne que

$$\boxed{\mathrm{S}_{r,1}(zx) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x^r\,\mathrm{e}^r)}$$

17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons, pour $x \in \mathbb{R}$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{p-1} \mathrm{S}_{r,1}\left(\xi^k\, x\right)$. Par définition,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{S}_{r,1}\left(\xi^k\, x\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n\,!}\, \xi^{kn}\, x^n$$

Comme la somme extérieure est finie, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n\,!}\, \xi^{kn}\, x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{n^r}{n\,!}\, \xi^{kn}\, x^n$$

Calculons à présent le membre de droite. Pour ce faire, considérons $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent alors.

- Si p ne divise pas n, alors $\xi^n \neq 1$ et
$$\sum_{k=0}^{p-1} \xi^{kn} = \frac{1 - \xi^{np}}{1 - \xi^n} = 0$$
- Si p divise n, alors $\xi^n = 1$ et
$$\sum_{k=0}^{p-1} \xi^{kn} = \sum_{k=0}^{p-1} 1 = p$$

Ainsi,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{n^r}{n\,!}\, \xi^{kn} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)\,!}\, p\, x^{pn}$$

> On dit que $\xi = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi}{p}}$ est une racine p-ième primitive de l'unité c'est-à-dire que p est le plus petit entier strictement positif tel que $\xi^p = 1$.

En conclusion,
$$\boxed{\forall p \geqslant 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{S}_{r,1}(\xi^k\, x) = p\, \mathrm{S}_{r,p}(x)}$$

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p\, \mathrm{S}_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \mathrm{S}_{r,1}(x)$. On a

$$p\, \mathrm{S}_{r,p}(x) = \mathrm{S}_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{S}_{r,1}\left(\xi^k\, x\right)$$

Or, $$\mathrm{S}_{r,1}\left(\xi^k\, x\right) = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(x^r\, \mathrm{e}^{\,x}\right) \qquad \text{(question 16)}$$

d'où $$p\, \mathrm{S}_{r,p}(x) = \mathrm{S}_{r,1}(x) + (p-1) \times \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(x^r\, \mathrm{e}^{\,x}\right)$$

soit $$p\, \mathrm{S}_{r,p}(x) = \mathrm{S}_{r,1}(x) + \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(x^r\, \mathrm{e}^{\,x}\right)$$

car p ne dépend pas de x. Or, d'après l'énoncé $\mathrm{H}_{r,1}$ démontré à la question 9,

$$\mathrm{S}_{r,1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^r\, \mathrm{e}^{\,x}$$

donc $$\underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(x^r\, \mathrm{e}^{\,x}\right) = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\mathrm{S}_{r,1}(x)\right)$$

Rappelons que $$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(g(x)\right)$$

Ainsi,
$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall r > 0 \qquad \mathrm{S}_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p}\, \mathrm{S}_{r,1}(x)}$$

Finalement,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_{r,p} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p}\, x^r\, \mathrm{e}^{\,x}}$$

ce qui correspond bien à l'énoncé $\mathrm{H}_{r,p}$.