

Variables aléatoires finies

1 _____ (*) _____

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Dans un sac sont disposés n jetons numérotés de 1 à n . On tire de ce sac 3 jetons en même temps. On note X la variable aléatoire donnant la valeur minimale des 3 jetons, Z celle donnant le maximum, et enfin Y celle donnant la valeur médiane.

- Donner la loi de Y .
- Calculer l'espérance de Y , $Y(Y+1)$ et enfin la variance de Y . Vérifier le résultat pour $n=3$.

2 _____ (**) _____ Mines PC 2017

Soient $(X_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi avec $P(X_{i,j} = 1) = P(X_{i,j} = -1) = 1/2$ pour tous i, j . On note M la matrice aléatoire $M = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

- Calculer l'espérance de $\text{Tr } M$.
- Calculer l'espérance de $\det M$.
- Calculer la probabilité que M soit de rang 1.

3 _____ (**) _____ Mines PC 2017

Soient A , B et C trois variables aléatoires mutuellement indépendantes sur (Ω, τ, P) . On suppose que A et B suivent une loi uniforme sur $\llbracket 1;n \rrbracket$, que C suit une loi uniforme sur $\{0, 1/n, 2/n, \dots, 1\}$. Pour $\omega \in \Omega$, on note Q_ω le polynôme aléatoire

$$Q_\omega = C(\omega) \cdot X^2 + B(\omega) \cdot X + A(\omega)$$

On note

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ Q &\longmapsto (Q')^2 \end{aligned}$$

Calculer $P(\varphi(Q_\omega) = Q_\omega)$.

4 _____ (**) _____ Centrale PC 2017

Les n candidats $C_1, \dots, C_n$ s'affrontent à une élection. On vote pour C_i avec probabilité $p_i > 0$ avec $p_1 + \dots + p_n = 1$. Après N votes, déterminer la loi du nombre X_i de votes en faveur de C_i . Déterminer la loi conjointe de (X_i, X_j) pour $1 \leq i < j \leq n$.

5 _____ (**) _____ Centrale MP 2015

Stefan Banach (1892-1945), qui était fumeur, avait toujours sur lui deux boîtes d'allumettes, une dans la poche gauche, l'autre dans la droite. A chaque fois qu'il allumait sa pipe, il sélectionnait aléatoirement une boîte des deux boîtes, puis une allumette à l'intérieur. Il remettait ensuite la boîte dans la poche d'où il l'avait tirée. Immanquablement, au bout d'un certain temps, il ouvrait une boîte et la trouvait vide. L'autre boîte contenait encore quelques allumettes. Combien ?

Dans toute la suite, on suppose que les deux boîtes contiennent initialement le même nombre n d'allumettes. On notera X_n la variable aléatoire donnant le nombre d'allumettes dans la boîte non vide à la fin de l'expérience.

- Déterminer un univers Ω pouvant modéliser une telle expérience. On pourra utiliser des suites finies à valeurs dans $\{0, 1\}$. Y a-t-il équiprobabilité sur l'univers Ω ? Quelle est la probabilité d'un événement donné ?
- Donner le support et la loi de X_n .
- Pour $k \in \llbracket 0;n \rrbracket$, montrer que $(2n-k)P(X_n = k+1) = 2(n-k)P(X_n = k)$
- En sommant l'égalité précédente sur k , en déduire l'espérance de X_n , puis un équivalent de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- Donner la loi et l'espérance de la variable aléatoire Y_n donnant le nombre d'allumettes dans une boîte lorsque Banach prend la dernière allumette de l'autre.

Variables aléatoires discrètes

6 _____ (*) _____ CCP PC 2017

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

- Pour tout $d \geq 2$, on note A_d l'évènement « X est un multiple de d ». Calculer $P(A_d)$.
- Les évènements A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

7 _____ (*) _____ X PC 2017

Soit X une variable aléatoire discrète strictement positive. Montrer que $E(X + 1/X) \geq 2$.

8 _____ (*) _____ **Mines PC 2017**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique. Trouver la probabilité pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$$

soit une matrice nilpotente.

9 _____ (**) _____ **X PC 2017**

Une machine produit deux types de pièces : le type A avec probabilité a , le type B avec probabilité $b = 1 - a$. Chaque pièce est défectueuse avec probabilité p , indépendante du type et indépendamment d'une pièce à l'autre. La machine s'arrête dès qu'elle a produit une pièce du type A.

- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses au moment de l'arrêt de la machine. Déterminer $E(X)$ sans déterminer complètement la loi de X . Commenter.
- Déterminer la loi de X et retrouver le résultat précédent.

10 _____ (**) _____ **X PC 2017**

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de deux faces consécutifs dans un jeu de pile ou face, dans lequel la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0; 1[$. Déterminer la loi de X , puis calculer son espérance.

11 _____ (***) _____ **Mines PC 2017**

Soient X une variable aléatoire discrète à valeurs entières et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. A quelle condition sur f les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Suites de variables aléatoires

12 _____ (**) _____ **Centrale PC 2017**

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note T_m la variable aléatoire donnant le rang du m -ième succès, c'est-à-dire que

$$T_m = \min \{k \in \mathbb{N}^*, X_1 + \dots + X_k = m\}$$

Déterminer la loi et l'espérance de T_m .

13 _____ (**) _____ **ENS PC 2017**

Soit $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, qui suivent une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_n = \sum_{k=0}^n \epsilon_k X^k$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n(\alpha)$ la probabilité que α soit racine de Q_n .

- Calculer $p_n(1)$. Déterminer un équivalent de $p_{2n-1}(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- Calculer $p_n(i)$.
- Calculer $p_n(j)$. Montrer que $p_n(j) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

14 _____ (**) _____ **Mines PC 2017**

Soient $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. Soit N une variable aléatoire indépendante des X_i et suivant une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Déterminer la loi de $Y = X_1 + \dots + X_N$.

15 _____ (***) _____ **ENS PC 2017**

Soit $p \in]0; 1[$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre p . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \min \{X_1, \dots, X_n\} \quad Z_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$$

puis $\alpha_n = E(Y_n)$ et $\beta_n = E(Z_n)$

- Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont monotones.
- Exprimer α_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis un équivalent de β_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- 1** (a) Pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, déterminer $P(Y = j)$ en dénombrant tous les tirages de la forme $(X, Y, Z) = (i, j, k)$ avec $i < j < k$.
 (b) Utiliser les formules donnant les valeurs de $\sum_{k=1}^n k^p$ pour $p \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ ou bien, pour simplifier les calculs, démontrer à l'aide d'un télescopage que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+p-1) = \frac{n(n+1) \cdots (n+p)}{p+1}$$

- 2** (a) Utiliser la linéarité de l'espérance.
 (b) Développer le déterminant (on pourra se contenter de décrire la forme de l'expression développée) puis utiliser l'indépendance mutuelle des coefficients et la linéarité de l'espérance.
 (c) Remarquer que M est de rang 1 si et seulement si pour tout $i \geq 2$, $C_i = \pm C_1$ où $C_1, \dots, C_n$ désignent les vecteurs colonnes de M .

- 3** Pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que $\varphi(P) = P$.

- 4** Utiliser un argument combinatoire et déterminer la probabilité d'obtenir r votes pour C_i et s votes pour C_j .

- 5** (a) Utiliser des suites finies à valeurs dans $\{G, D\}$ (poche gauche/droite) ou plus simplement dans $\{0, 1\}$ comportant $n+1$ fois 0 ou 1 et au plus n fois l'autre valeur.
 (b) Déterminer la forme d'une issue ω pour laquelle $X_n(\omega) = k$, puis sa probabilité et le nombre d'issues de cette forme (par un argument combinatoire).
 (c) Remplacer les coefficients binomiaux par leurs expressions en termes de factorielles.
 (d) Pour l'équivalent, utiliser la formule de Stirling.
 (e) Etablir un lien entre Y_n et X_{n-1} .

- 6** (a) C'est la somme des termes d'une suite géométrique.
 (b) Simplifier le quotient $P(A_2 \cap A_3)/(P(A_2) \cdot P(A_3))$ et vérifier qu'il est strictement inférieur à 1.

- 7** Utiliser le théorème de transfert.

- 8** Vérifier que M est nilpotente si et seulement si $X = Y$.

- 9** (a) Euh ...
 (b) Déterminer la loi du nombre N de pièces produites puis utiliser le système complet d'événements $(N = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Pour calculer l'espérance, on pourra utiliser le développement en série entière de $z \mapsto 1/(1-z)^2$.

- 10** En utilisant une disjonction de cas suivant les résultats du premier lancer, justifier la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \geq 4, \quad P(X = k) = p(1-p)P(X = k-2) + pP(X = k-1) \quad (\star)$$

Une preuve rigoureuse de ce résultat est cependant relativement compliquée à rédiger.

- 11** En raisonnant sur les ensembles, vérifier que

$$P(X = n, f(X) = y) = P(X = n) \cdot \delta_{y, f(n)} \quad (\star)$$

Montrer alors que X et $f(X)$ sont indépendantes si et seulement si $f(X)$ est presque sûrement constante, c'est-à-dire qu'il existe y_0 tel que $P(f(X) = y_0) = 1$.

- 12** On pourra utiliser deux méthodes. On peut remarquer que T_m peut s'écrire comme la somme de variables aléatoires suivant une loi géométrique de paramètre p . On peut aussi déterminer directement $P(T_m = k)$ par des arguments combinatoires. Dans les deux cas, on aura besoin de connaître le développement en série entière de $z \mapsto 1/(1-z)^m$.

- 13** (a) Remarquer que $\epsilon_0 + \dots + \epsilon_n = 0$ si et seulement si n est impair et si la somme contient autant de 1 que de -1 .
 (b) Séparer les parties réelles et imaginaires dans $Q_n(i)$ puis raisonner comme précédemment.
 (c) Exprimer $Q_n(j)$ en fonction des trois sommes

$$S_0 = \sum_{3k \leq n} \epsilon_{3k} \quad S_1 = \sum_{3k+1 \leq n} \epsilon_{3k+1} \quad S_2 = \sum_{3k+2 \leq n} \epsilon_{3k+2}$$

et séparer à nouveau parties réelles et imaginaires.

- 14** Utiliser la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $((N = n))_{n \in \mathbb{N}}$.

- 15** (a) Utiliser la croissance de l'espérance.
 (b) On pourra déterminer la loi de Y_n en exprimant l'événement $(Y_n = k)$ à l'aide de $(X_i \geq k)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ et $(X_i \geq k+1)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$, ou plus directement utiliser l'égalité

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y_n \geq k)$$

- (c) Déterminer la loi de Z_n en exprimant l'événement $(Z_n = k)$ à l'aide de $(X_i \leq k)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ et $(X_i \leq k-1)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$