

**1** ————— (\*) —————

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Dans un sac sont disposés  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . On tire de ce sac 3 jetons en même temps. On note  $X$  la variable aléatoire donnant la valeur minimale des 3 jetons,  $Z$  celle donnant le maximum, et enfin  $Y$  celle donnant la valeur médiane.

- (a) Donner la loi de  $Y$ .  
 (b) Calculer l'espérance de  $Y$ ,  $Y(Y+1)$  et enfin la variance de  $Y$ . Vérifier le résultat pour  $n=3$ .

(a). On suppose les tirages équiprobables. Pour déterminer la loi de  $Y$ , on procède donc par dénombrement :

- Le nombre de façons de tirer 3 jetons dans le sac simultanément est donné par

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

- Fixons  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Le nombre de tirages de la forme  $(i, j, k)$  avec  $i < j$  et  $k > j$  est donné par  $(j-1) \cdot (n-j)$  (on a  $j-1$  choix pour  $x$ ,  $n-j$  pour  $k$ ).

On en déduit donc que

$$\forall y \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(Y = j) = \frac{6(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)}$$

(b). Commençons par justifier l'égalité en indication. Il suffit pour cela de remarquer que pour tout entier  $k$  et tout entier  $p$ , si l'on pose

$$u_{k,p} = k \cdot (k+1) \cdots (k+p)$$

alors, pour tout entier  $k$  et  $p \geq 1$

$$\begin{aligned} u_{k+1,p} - u_{k,p} &= (k+1)(k+2) \cdots (k+p+1) - k(k+1) \cdots (k+p) \\ &= (k+1)(k+2) \cdots (k+p) \cdot [(k+p+1) - k] \\ &= (p+1) \cdot (k+1) \cdots (k+p) \\ u_{k+1,p} - u_{k,p} &= (p+1) \cdot u_{k+1,p-1} \end{aligned}$$

En sommant pour  $k$  allant de 0 à  $n-1$ , on obtient donc par télescopage

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1,p-1} = \frac{1}{p+1} [u_{n,p} - u_{0,p}]$$

soit après un changement d'indice

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+p-1) = \frac{n(n+1) \cdots (n+p)}{p+1}$$

On peut maintenant passer aux calculs. Par définition,

$$E(Y) = \sum_{j=1}^n j \cdot P(Y = j) = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{j=1}^n j(j-1)(n-j)$$

En écrivant  $n-j = (n+1) - (j+1)$ , on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j(j-1)(n-j) &= (n+1) \sum_{j=1}^n (j-1) \cdot j - \sum_{j=1}^n (j-1) \cdot j \cdot (j+1) \\ &= (n+1) \sum_{j=0}^{n-1} j \cdot (j+1) - \sum_{j=0}^{n-1} j \cdot (j+1) \cdot (j+2) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)^2}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{12} [4(n+1) - 3(n+2)] \\ \sum_{j=1}^n j(j-1)(n-j) &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{12} \end{aligned}$$

et finalement,

$$E(Y) = \frac{n+1}{2}$$

Pour le deuxième calcul, le théorème de transfert assure que

$$E(Y(Y+1)) = \sum_{j=1}^n j(j+1) \cdot P(Y=j) = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{j=1}^n j(j-1)(j+1)(n-j)$$

On écrit cette fois que  $n-j = (n+2) - (j+2)$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j(j-1)(j+1)(n-j) &= (n+2) \sum_{j=1}^n (j-1) \cdot j \cdot (j+1) - \sum_{j=1}^n (j-1) \cdot j \cdot (j+1) \cdot (j+2) \\ &= (n+2) \sum_{j=0}^{n-1} j \cdot (j+1) \cdot (j+2) - \sum_{j=0}^{n-1} j \cdot (j+1) \cdot (j+2) \cdot (j+3) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)^2}{4} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{5} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{20} [5(n+2) - 4(n+3)] \\ \sum_{j=1}^n j(j-1)(j+1)(n-j) &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{20} \end{aligned}$$

et ainsi

$$E(Y(Y+1)) = \frac{3(n+1)(n+2)}{10}$$

Enfin, par définition de la variance et linéarité de l'espérance

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y(Y+1)) - E(Y) - E(Y)^2$$

Avec les calculs précédents, il vient

$$V(Y) = (n+1) \left[ \frac{3(n+2)}{10} - \frac{1}{2} - \frac{n+1}{4} \right]$$

soit toutes simplifications faites

$$V(Y) = \frac{(n+1)(n-3)}{20}$$

Pour  $n=3$ , il n'y a qu'un seul tirage possible, et la variable  $Y$  est constante égale à 2, donc d'espérance égale à 2 et de variance nulle, ce qui est bien la valeur donnée par les formules ci-dessus.

**2** ————— (\*\*) ————— **Mines PC 2017**

Soient  $(X_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi avec  $P(X_{i,j} = 1) = P(X_{i,j} = -1) = 1/2$  pour tous  $i, j$ . On note  $M$  la matrice aléatoire  $M = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

- Calculer l'espérance de  $\text{Tr } M$ .
- Calculer l'espérance de  $\det M$ .
- Calculer la probabilité que  $M$  soit de rang 1.

(a). Par définition, 
$$\text{Tr } M = \sum_{k=1}^n X_{k,k}$$

et donc, par linéarité de l'espérance, 
$$E(\text{Tr } M) = \sum_{k=1}^n \text{Tr } X_{k,k}$$

Il est clair que  $X_{i,j}$  est d'espérance nulle pour tous  $i, j$ . Par conséquent,

$$E(\text{Tr } M) = 0$$

- (b). En développant par rapport à la première colonne, on a cette fois

$$\det M = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot X_{k,1} \cdot \det \widetilde{M}_{k,1}$$

où pour tout entier  $k$ , la matrice  $\widetilde{M}_{k,1}$  est la matrice obtenue en supprimant la première colonne et la  $k$ -ième ligne de  $M$ . A nouveau, par linéarité de l'espérance,

$$E(\det M) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot E \left( X_{k,1} \cdot \det \widetilde{M}_{k,1} \right)$$

La quantité  $\det \widetilde{M}_{k,1}$  ne dépend que des variables aléatoires  $X_{i,j}$  avec  $i \neq k$  et  $j > 1$ . L'indépendance mutuelle de  $\{X_{k,1}\} \cup \{X_{i,j}, i \neq k, j > 1\}$  permet donc d'écrire que

$$E\left(X_{k,1} \cdot \det \widetilde{M}_{k,1}\right) = E(X_{k,1}) \cdot E\left(\det \widetilde{M}_{k,1}\right)$$

Sachant que  $E(X_{k,1}) = 0$  pour tout entier  $k$ , il vient là encore

$$E(\det M) = 0$$

(c). Notons  $C_1, \dots, C_n$  les vecteurs colonnes de la matrice  $M$ . Puisque  $C_1$  est un vecteur non nul,  $M$  est de rang 1 si et seulement si pour tout  $i$ ,  $C_i$  est colinéaire à  $C_1$ . Mais puisque les vecteurs sont tous à coordonnées dans  $\{-1, 1\}$ , cela signifie que pour tout  $i \geq 2$ ,  $C_i = C_1$  ou  $C_i = -C_1$ . On peut donc décrire l'évènement «  $M$  est de rang 1 » de la manière suivante :

$$\llcorner M \text{ est de rang 1 } \llcorner = \bigcup_{\epsilon_2, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}} (C_1 = \epsilon_2 \cdot C_2 = \dots = \epsilon_n \cdot C_n) \quad (1)$$

l'union étant disjointe. L'évènement  $(C_1 = C_2 = \dots = C_n)$  s'écrit maintenant

$$(C_1 = C_2 = \dots = C_n) = \bigcap_{i=1}^n \left[ \bigcap_{j=2}^n (X_{i,j} = X_{i,1}) \right] \quad (2)$$

Pour finir, étant donné  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on a

$$\bigcap_{j=2}^n (X_{i,j} = X_{i,1}) = (X_{i,1} = \dots = X_{i,n} = 1) \cup (X_{i,1} = \dots = X_{i,n} = -1) \quad (3)$$

avec là encore une union disjointe. On peut maintenant passer aux probabilités. Par union disjointe, puis indépendance mutuelle, on a avec (3)

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{j=2}^n (X_{i,j} = X_{i,1})\right] &= P(X_{i,1} = \dots = X_{i,n} = 1) + P(X_{i,1} = \dots = X_{i,n} = -1) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_{i,k} = 1) + \prod_{k=1}^n P(X_{i,k} = -1) \\ P\left[\bigcap_{j=2}^n (X_{i,j} = X_{i,1})\right] &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser l'égalité (2). Toujours par indépendance mutuelle des  $(X_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ , il vient

$$\begin{aligned} P(C_1 = C_2 = \dots = C_n) &= \prod_{i=1}^n P\left[\bigcap_{j=2}^n (X_{i,j} = X_{i,1})\right] \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{2^{n-1}} \\ P(C_1 = C_2 = \dots = C_n) &= \frac{1}{2^{n(n-1)}} \end{aligned}$$

Considérons pour terminer l'égalité (1). Celle-ci assure que

$$P(\llcorner M \text{ est de rang 1 } \llcorner) = \sum_{\epsilon_2, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}} P(C_1 = \epsilon_2 \cdot C_2 = \dots = \epsilon_n \cdot C_n)$$

On vérifie facilement que le calcul effectué pour déterminer  $P(C_1 = \dots = C_n)$  se généralise pour déterminer la probabilité  $P(C_1 = \epsilon_2 \cdot C_2 = \dots = \epsilon_n \cdot C_n)$  et obtenir la même valeur, à savoir  $1/2^{n(n-1)}$ . Il s'ensuit que

$$P(\llcorner M \text{ est de rang 1 } \llcorner) = \text{card}\{\epsilon_2, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}\} \cdot \frac{1}{2^{n(n-1)}} = \frac{2^{n-1}}{2^{n(n-1)}}$$

et pour conclure

$$P(\llcorner M \text{ est de rang 1 } \llcorner) = \frac{1}{2^{(n-1)^2}}$$

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois variables aléatoires mutuellement indépendantes sur  $(\Omega, \tau, P)$ . On suppose que  $A$  et  $B$  suivent une loi uniforme sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , que  $C$  suit une loi uniforme sur  $\{0, 1/n, 2/n, \dots, 1\}$ . Pour  $\omega \in \Omega$ , on note  $Q_\omega$  le polynôme aléatoire

$$Q_\omega = C(\omega) \cdot X^2 + B(\omega) \cdot X + A(\omega)$$

On note

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ Q &\longmapsto (Q')^2 \end{aligned}$$

Calculer  $P(\varphi(Q_\omega) = Q_\omega)$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ . On note  $P = cX^2 + bX + a$ . Alors,

$$\varphi(P) = (2cX + b)^2 = 4c^2X^2 + 4cbX + b^2$$

puis

$$\varphi(P) = P \iff \begin{cases} 4c^2 = c \\ 4cb = b \\ b^2 = a \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1/4 \\ b^2 = a \end{cases} \text{ ou } P = 0$$

Notons donc  $X$  le sous-ensemble de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  constitué des carrés d'entiers :

$$X = \{k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \exists p \ k = p^2\} = \{p^2, p \in \llbracket 1; \lfloor \sqrt{n} \rfloor \rrbracket\}$$

D'après l'équivalence précédente, et puisque  $A$  et  $B$  ne s'annulent pas,

$$(\varphi(Q_\omega) = Q_\omega) = \left(C = \frac{1}{4}\right) \cap \left[\bigcup_{p=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (B = p) \cap (A = p^2)\right]$$

Par réunion disjointe et indépendance, on en déduit que

$$P(\varphi(Q_\omega) = Q_\omega) = P\left(C = \frac{1}{4}\right) \cdot \left[\sum_{p=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} P(B = p) \cdot P(A = p^2)\right]$$

Notons que  $C$  ne peut prendre la valeur  $1/4$  que si  $n$  est un multiple de 4. Enfin, puisque  $C$  (resp.  $A$  et  $B$ ) suit une loi uniforme sur un ensemble de cardinal  $n+1$  (resp. de cardinal  $n$ ), on peut conclure que

$$P(\varphi(Q_\omega) = Q_\omega) = \begin{cases} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n^2(n+1)} & \text{si 4 divise } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4

(\*\*)

Centrale PC 2017

Les  $n$  candidats  $C_1, \dots, C_n$  s'affrontent à une élection. On vote pour  $C_i$  avec probabilité  $p_i > 0$  avec  $p_1 + \dots + p_n = 1$ . Après  $N$  votes, déterminer la loi du nombre  $X_i$  de votes en faveur de  $C_i$ . Déterminer la loi conjointe de  $(X_i, X_j)$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ .

Pour tout  $(i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; N \rrbracket$ , on note  $X_{i,k}$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le  $k$ -ième votant a voté pour  $C_i$  et 0 sinon. Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $X_i$  est la somme des  $(X_{i,k})_{k \in \llbracket 1; N \rrbracket}$  qui sont de toutes de Bernoulli de paramètre  $p_i$ . On en déduit aussitôt que

La variable aléatoire  $X_i$  suit une loi binomiale de paramètres  $(N, p_i)$ .

La variable aléatoire  $(X_i, X_j)$  est à valeurs dans  $\llbracket 0; N \rrbracket^2$ .

- Il est clair que pour tous  $r, s \leq N$  tels que  $r + s > N$ , on a  $P(X_i = r, X_j = s) = 0$ .
- Soient  $r, s \leq N$  tels que  $r + s \leq N$ . Alors,

$$\begin{aligned} P(X_i = r, X_j = s) &= \binom{N}{r} \cdot \binom{N-r}{s} \cdot p_i^r \cdot p_j^s (1 - p_i - p_j)^{N-r-s} \\ &= N! \cdot \frac{p_i^r}{r!} \cdot \frac{p_j^s}{s!} \cdot \frac{(1 - p_i - p_j)^{N-r-s}}{(N-r-s)!} \end{aligned}$$

car on a  $\binom{N}{r}$  choix possible pour les  $r$  votants pour  $X_i$ , puis  $\binom{N-r}{s}$  choix pour les  $s$  votants pour  $X_j$ .

On résume donc la loi conjointe de la manière suivante :

$$\forall r, s \in \llbracket 0; N \rrbracket^2, \quad P(X_i = r, X_j = s) = \begin{cases} 0 & \text{si } r + s > N \\ N! \cdot \frac{p_i^r}{r!} \cdot \frac{p_j^s}{s!} \cdot \frac{(1 - p_i - p_j)^{N-r-s}}{(N-r-s)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

5

(\*\*)

Centrale MP 2015

Stefan Banach (1892-1945), qui était fumeur, avait toujours sur lui deux boîtes d'allumettes, une dans la poche gauche, l'autre dans la droite. A chaque fois qu'il allumait sa pipe, il sélectionnait aléatoirement une boîte des deux boîtes, puis une allumette à l'intérieur. Il remettait ensuite la boîte dans la poche d'où il l'avait tirée. Immanquablement, au bout d'un certain temps, il ouvrait une boîte et la trouvait vide. L'autre boîte contenait encore quelques allumettes. Combien ?

Dans toute la suite, on suppose que les deux boîtes contiennent initialement le même nombre  $n$  d'allumettes. On notera  $X_n$  la variable aléatoire donnant le nombre d'allumettes dans la boîte non vide à la fin de l'expérience.

- Déterminer un univers  $\Omega$  pouvant modéliser une telle expérience. On pourra utiliser des suites finies à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Y a-t-il équiprobabilité sur l'univers  $\Omega$  ? Quelle est la probabilité d'un événement donné ?
- Donner le support et la loi de  $X_n$ .
- Pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , montrer que  $(2n - k)P(X_n = k + 1) = 2(n - k)P(X_n = k)$
- En sommant l'égalité précédente sur  $k$ , en déduire l'espérance de  $X_n$ , puis un équivalent de  $E(X_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Donner la loi et l'espérance de la variable aléatoire  $Y_n$  donnant le nombre d'allumettes dans une boîte lorsque Banach prend la dernière allumette de l'autre.

- On modélise une issue de l'expérience par une suite finie d'éléments de  $\{0, 1\}$ . Le  $k$ -ième élément de la suite vaut 0 si la boîte choisie au  $k$ -ième tirage est la gauche, et 1 sinon. Puisque l'expérience s'arrête lorsque l'on se rend compte qu'une boîte est vide, la suite contient nécessairement  $n + 1$  fois la valeur 0 et un nombre de 1 inférieur ou égal à  $n$ , ou l'inverse.

On peut prendre pour  $\Omega$  l'ensemble des suites  $u$  finies d'éléments de  $\{0, 1\}$  tels que  $|u|_0 < |u|_1 = n + 1$  ou  $|u|_1 < |u|_0 = n + 1$  où la notation  $|u|_x$  désigne le nombre d'éléments de la suite  $u$  égaux à  $x$ .

La probabilité d'un événement est alors égal à  $1/2^\ell$  où  $\ell$  est la longueur de la suite. Par conséquent,

Il n'y a pas équiprobabilité sur  $\Omega$ .

- Le support de  $X_n$  vaut  $[0; n]$ . En effet, une boîte peut très bien n'avoir jamais été prise, ou au contraire entièrement vidée quand on se rend compte que l'autre est vide. Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$  et  $\omega \in \Omega$ . Pour avoir  $X_n(\omega) = k$ , il faut avoir tiré  $n + 1$  allumettes dans une boîte et  $n - k$  dans l'autre, sur les  $2n - k$  premiers tirages (le dernier tirage doit se faire dans la boîte vide). Il y a  $\binom{2n-k}{n-k} = \binom{2n-k}{n}$  issues de cette nature pour chacune des deux boîtes, chacune étant de probabilité  $1/2^{2n-k+1}$ . Ainsi,

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X_n = k) = \frac{1}{2^{2n-k}} \binom{2n-k}{n}$$

- Compte tenu de l'expression précédente, il s'agit d'un simple calcul. En effet, pour  $k \leq n - 1$ ,

$$\begin{aligned} (2n - k)P(X_n = k + 1) &= \frac{2n - k}{2^{2n-k-1}} \binom{2n-k-1}{n} \\ &= \frac{2n - k}{2^{2n-k-1}} \frac{(2n - k - 1)!}{n!(n - k - 1)!} \\ &= \frac{2(n - k)}{2^{2n-k}} \frac{(2n - k)!}{n!(n - k)!} \\ (2n - k)P(X_n = k + 1) &= 2(n - k)P(X_n = k) \end{aligned}$$

Pour  $k = n$ , on a clairement les deux membres de l'égalité nuls donc celle-ci est encore vérifiée.

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad (2n - k)P(X_n = k + 1) = 2(n - k)P(X_n = k)$$

- Comme indiqué, sommons l'égalité pour  $k$  allant de 0 à  $n$ . On obtient

$$\sum_{k=0}^n (2n - k)P(X_n = k + 1) = 2 \sum_{k=0}^n (n - k)P(X_n = k)$$

Notons que dans la somme de gauche, le terme d'indice  $n$  est nul puisque  $P(X_n = n + 1)$  est nul. Un changement d'indice dans celle-ci donne

$$\sum_{k=1}^n (2n - k + 1)P(X_n = k) = 2 \sum_{k=0}^n (n - k)P(X_n = k)$$

En faisant tout passer à gauche et en rajoutant le terme manquant dans une somme, il vient ensuite

$$\sum_{k=0}^n (k+1)P(X_n = k) - (2n+1)P(X_n = 0) = 0$$

et enfin puisque  $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$ , on obtient

$$\sum_{k=0}^n k P(X_n = k) = (2n+1)P(X_n = 0) - 1$$

Compte tenu de la loi de  $X_n$ , il vient finalement que

$$E(X_n) = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n} - 1$$

La formule de Stirling donnant l'équivalent de  $n!$  permet ensuite d'obtenir

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot (2n/e)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

d'où l'on tire immédiatement que

$$E(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

- (e). Pour  $n = 1$ ,  $Y_1$  est une variable aléatoire certaine avec  $P(Y_1 = 1) = 1$ . Sinon, l'espace probabilisé qui décrit l'expérience est composé de suites finies de  $\{0, 1\}$ , comportant  $n$  zéros et terminant par un 0 (ou l'inverse). C'est donc le même que celui de la variable  $X_{n-1}$ . En revanche, si la suite comporte  $n$  zéros et  $k$  un,  $Y_n$  renvoie  $n - k$  là où  $X_{n-1}$  renvoie  $n - 1 - k$ . Dès lors,  $Y$  suit la même loi que  $X_{n-1} + 1$ , c'est-à-dire que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(Y_n = k) = \frac{1}{2^{2n-k-1}} \binom{2n-k-1}{n-1}$$

Puisque  $Y_n$  et  $X_{n-1} + 1$  ont mêmes lois, leurs espérances sont égales et par linéarité,

$$E(Y_n) = E(X_{n-1} + 1) = E(X_{n-1}) + 1$$

d'où

$$E(Y_n) = \frac{2n-1}{4^{n-1}} \binom{2n-2}{n-1}$$

**6** \_\_\_\_\_ (\*) \_\_\_\_\_ **CCP PC 2017**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

- (a). Pour tout  $d \geq 2$ , on note  $A_d$  l'évènement «  $X$  est un multiple de  $d$  ». Calculer  $P(A_d)$ .  
 (b). Les évènements  $A_2$  et  $A_3$  sont-ils indépendants ?

On note  $p$  la paramètre de la loi géométrique suivie par  $X$  et  $q = 1 - p$ .

- (a). Par définition,
- $$\llbracket X \text{ est un multiple de } d \rrbracket = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (X = d \cdot k)$$

donc par union disjointe

$$\begin{aligned} P(\llbracket X \text{ est un multiple de } d \rrbracket) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = d \cdot k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p \cdot q^{d \cdot k - 1} \end{aligned}$$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme  $p q^{d-1}$  et de raison  $q^d$ . Par suite,

$$P(\llbracket X \text{ est un multiple de } d \rrbracket) = \frac{p \cdot q^{d-1}}{1 - q^d}$$

(b). Il est clair que  $A_2 \cap A_3 = A_6$ . En appliquant la formule précédente, on a

$$P(A_2) = \frac{pq}{1-q^2} \quad P(A_3) = \frac{pq^2}{1-q^3} \quad \text{et} \quad P(A_6) = \frac{pq^5}{1-q^6}$$

Par ailleurs,

$$P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{p^2 q^3}{(1-q^2)(1-q^3)}$$

Après simplifications, notamment en utilisant les factorisations

$$1-q^2 = (1-q)(1+q) = p \cdot (1+q) \quad \text{et} \quad 1-q^6 = (1-q^3)(1+q)(1-q+q^2)$$

que l'on utilise pour simplifier les quotients des dénominateurs, on trouve donc

$$\frac{P(A_3 \cap A_2)}{P(A_2) \cdot P(A_3)} = \frac{q^2(1-q^2)(1-q^3)}{p(1-q^6)} = \frac{q^2}{q^2-q+1} < 1$$

Finalement,

Les évènements  $A_2$  et  $A_3$  ne sont pas indépendants.

**7** \_\_\_\_\_ (\*) \_\_\_\_\_ **X PC 2017**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète strictement positive. Montrer que  $E(X + 1/X) \geq 2$ .

Puisque  $X$  est discrète, l'ensemble  $X(\Omega)$  est dénombrable. On peut donc écrire  $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$  avec  $x_k > 0$  pour tout  $k$  par hypothèse. D'après le théorème de transfert,

$$E\left(X + \frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right) \cdot P(X = x_k)$$

Une étude rapide de la fonction  $f : t \mapsto t + 1/t$  montre que celle-ci est décroissante sur  $]0; 1[$  et croissante sur  $]1; +\infty[$  donc est minorée par sa valeur en 1, en l'occurrence 2. Par suite,

$$E\left(X + \frac{1}{X}\right) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \cdot P(X = x_k)$$

Or,  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = x_k) = 1$  par définition des  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ce qui achève la preuve.

$$E\left(X + \frac{1}{X}\right) \geq 2$$

**8** \_\_\_\_\_ (\*) \_\_\_\_\_ **Mines PC 2017**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique. Trouver la probabilité pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$$

soit une matrice nilpotente.

Une matrice de taille 2 est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est égal à  $X^2$ , ce qui revient à avoir une trace et un déterminant nul. Or,  $M$  est de rang 1 donc de déterminant nul, et de trace égale à  $X - Y$ . Par suite

$$\ll M \text{ nilpotente} \gg = (X = Y) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [(X = k) \cap (Y = k)]$$

Par réunion disjointe puis indépendance, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(\ll M \text{ nilpotente} \gg) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \cdot P(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 \cdot (1-p)^{2(k-1)} \\ P(\ll M \text{ nilpotente} \gg) &= \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} \end{aligned}$$

Pour conclure, après simplifications

$$P(\ll M \text{ nilpotente} \gg) = \frac{p}{2-p}$$

9 ————— (\*\*) ————— **X PC 2017**

Une machine produit deux types de pièces : le type A avec probabilité  $a$ , le type B avec probabilité  $b = 1 - a$ . Chaque pièce est défectueuse avec probabilité  $p$ , indépendante du type et indépendamment d'une pièce à l'autre. La machine s'arrête dès qu'elle a produit une pièce du type A.

- (a). Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses au moment de l'arrêt de la machine. Déterminer  $E(X)$  sans déterminer complètement la loi de  $X$ . Commenter.
- (b). Déterminer la loi de  $X$  et retrouver le résultat précédent.

(a). Euh .... Aucune idée à vrai dire.

(b). Notons  $N$  le nombre de pièces produites, qui suit une loi géométrique de paramètre  $a$ . Les variables aléatoires  $X$  et  $N$  sont respectivement à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^*$ . Pour tout entier  $n$ , à l'aide du système complet d'événements  $(N = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ , on peut écrire

$$P(X = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P[(X = n) \cap (N = k)]$$

Pour  $k < n$ , on a  $(X = n) \cap (N = k) = \emptyset$  donc la somme se réduit aux indices de  $n$  à  $+\infty$  (avec un cas particulier si  $n = 0$  car la somme démarre à 1). Ainsi,

$$P(X = n) = \sum_{k=\max(1,n)}^{+\infty} P_{(N=k)}(X = n) \cdot P(N = k)$$

La loi de  $X$  sachant  $(N = k)$  est une loi binomiale de paramètres  $(p, k)$  donc

$$P(X = n) = \sum_{k=\max(1,n)}^{+\infty} \binom{k}{n} p^n \cdot (1-p)^{k-n} \cdot b^{k-1} \cdot a$$

Or, pour  $|z| < 1$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} z^k = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} z^{k-n} \quad (\star)$$

On distingue maintenant les deux cas  $n = 0$  et  $n \geq 1$  :

- Si  $n \geq 1$ , alors à l'aide de  $(\star)$ , on obtient

$$P(X = n) = a \cdot b^{n-1} \cdot p^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \cdot [b(1-p)]^{k-n} = \frac{a \cdot b^{n-1} \cdot p^n}{(1-b(1-p))^{n+1}}$$

- Si  $n = 0$ , cette fois en utilisant simplement la somme des termes d'une suite géométrique, il vient

$$P(X = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k \cdot b^{k-1} \cdot a = \frac{a \cdot (1-p)}{1-b(1-p)}$$

En notant  $q = 1 - p$ , la loi de  $X$  est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \begin{cases} \frac{a \cdot b^{n-1} \cdot p^n}{(1-b \cdot q)^{n+1}} & \text{si } n \geq 1 \\ \frac{a \cdot (1-p)}{1-b \cdot q} & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

L'espérance de  $X$  est ensuite donnée par

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot P(X = n) = \frac{a \cdot p}{(1-b \cdot q)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left( \frac{b \cdot p}{1-b \cdot q} \right)^{n-1}$$

En prenant  $n = 1$  dans l'égalité  $(\star)$ , on obtient

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k z^{k-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}$$

et ainsi

$$E(X) = \frac{a \cdot p}{(1-b \cdot q)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{b \cdot p}{1-b \cdot q}\right)^2} = \frac{a \cdot p}{(1-b(p+q))^2}$$

et finalement, puisque  $p + q = 1$  et  $1 - b = a$ , il vient

$$E(X) = \frac{p}{a}$$

**10** ————— (\*\*) ————— **X PC 2017**

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de deux faces consécutifs dans un jeu de pile ou face, dans lequel la probabilité d'obtenir pile est  $p \in ]0; 1[$ . Déterminer la loi de  $X$ , puis calculer son espérance.

Pour tout entier  $k$ , on note  $P_k$  (resp.  $F_k$ ) l'évènement « on fait pile (resp. face) au  $k$ -ième lancer ». Ces évènements sont mutuellement indépendants. Il est clair que

$$(X = 0) = (X = 1) = \emptyset \quad \text{d'où} \quad P(X = 0) = P(X = 1) = 0$$

Par ailleurs,  $(X = 2) = F_1 \cap F_2 \quad \text{et} \quad (X = 3) = P_1 \cap F_2 \cap F_3$

d'où  $P(X = 2) = (1 - p)^2 \quad \text{et} \quad P(X = 3) = p(1 - p)^2$

Soit maintenant  $k \geq 4$ . Alors,  $(X = k) = [(X = k) \cap P_1] \cup [(X = k) \cap F_1]$

et par union disjointe,  $P(X = k) = P((X = k) \cap P_1) + P((X = k) \cap F_1)$

Soit  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une issue. Remarquons maintenant que

- Si  $\omega \in (X = k) \cap F_1$ , alors  $\omega_1 = F$  donc nécessairement  $\omega_2 = P$  (sinon on fait deux faces consécutifs dès le deuxième lancer). De plus,  $(\omega_n)_{n \geq 3} \in (X = k - 2)$ .
- Si  $\omega \in (X = k) \cap P_1$ , alors  $\omega_1 = P$  mais cette fois sans condition sur  $\omega_2$ , si ce n'est que  $(\omega_n)_{n \geq 2} \in (X = k - 1)$ .

On en déduit donc la formule de récurrence suivante :

$$\forall k \geq 4, \quad P(X = k) = p(1 - p) P(X = k - 2) + p P(X = k - 1) \quad (\star)$$

Une preuve un peu plus rigoureuse est rédigée en fin d'exercice. Notons que le résultat reste vrai pour  $k = 3$  mais qu'il est faux pour  $k = 2$ . L'équation caractéristique de la récurrence est donnée par

$$r^2 - p r - p(1 - p) = 0$$

de discriminant  $\Delta = p^2 + 4p(1 - p) = 4p - 3p^2 > 0$

et de racines réelles  $r_1 = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{p - \sqrt{\Delta}}{2}$

On en déduit qu'il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$P(X = k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k$$

En prenant  $p = 1$  puis  $p = 2$ , on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \\ \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = (1 - p)^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{(1 - p)^2}{r_1^2 - r_1 r_2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{(1 - p)^2}{r_2^2 - r_1 r_2}$$

et finalement

La loi de  $X$  est donnée par  $P(X = 0) = 0$  et pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$P(X = k) = (1 - p)^2 \frac{r_1^{k-1} - r_2^{k-1}}{r_1 - r_2}$$

avec  $r_1 = \frac{p + \sqrt{4p - 3p^2}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{p - \sqrt{4p - 3p^2}}{2}$

Notons que  $X$  admet bien une espérance puisque si l'on note  $P = X^2 - pX - p(1 - p)$ , alors

$$P(-1) = 1 + p^2 > 0 \quad P(0) = -p(1 - p) < 0 \quad P(1) = (1 - p)^2 > 0$$

ce qui prouve que le polynôme du second degré  $P$  a une racine dans  $]-1; 0[$  et une autre dans  $]0; 1[$ . Ainsi,  $r_1$  et  $r_2$  sont deux réels appartenant à  $]-1; 1[$  et donc  $k r_i^k = o(1/k^2)$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Pour déterminer l'espérance de  $X$ , plutôt que d'utiliser l'expression de  $P(X = k)$ , il est plus judicieux de multiplier la relation de récurrence  $(\star)$  par  $k$  et de sommer pour  $k$  allant de 3 à  $+\infty$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{+\infty} k P(X = k) &= p(1 - p) \sum_{k=3}^{+\infty} k P(X = k - 2) + p \sum_{k=3}^{+\infty} k P(X = k - 1) \\ &= p(1 - p) \sum_{k=1}^{+\infty} (k + 2) P(X = k) + p \sum_{k=2}^{+\infty} (k + 1) P(X = k) \end{aligned}$$

En séparant les sommes puis en utilisant les égalités  $\sum_{k=1}^{+\infty} k P(X = k) = E(X)$  et  $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$ , il vient

$$E(X) - 2P(X = 2) = p(1-p)[E(X) + 2] + p[E(X) + 1]$$

et donc, à l'aide des valeurs précédemment calculées de la loi de  $X$ ,

$$[1 - p - p(1-p)] E(X) = 2(1-p)^2 + 2p(1-p) + p$$

soit finalement

$$E(X) = \frac{2-p}{(1-p)^2}$$

**Preuve de  $(\star)$  :** Il suffit de montrer que pour  $k \geq 4$ , on a

$$P((X = k) \cap F_1) = p(1-p)P(X = k-2) \quad \text{et} \quad P((X = k) \cap P_1) = pP(X = k-1)$$

On se contente de la première égalité, la deuxième étant similaire. On peut commencer par un exemple pour illustrer l'idée.

- Pour  $k = 5$ , on a  $(X = 5) \cap F_1 = (F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap F_5)$

Par union disjointe et indépendance

$$P((X = 5) \cap F_1) = P(F_1) \cdot P(P_2) \cdot P(P_3) \cdot P(F_4) \cdot P(F_5)$$

Les deux premiers termes du produits valent  $1-p$  et  $p$ . Puisque les lancers suivent tous la même loi, on peut ré-écrire le produit (en décalant les indices de 2) sous la forme

$$P(F_1) \cdot P(P_2) \cdot P(P_3) \cdot P(F_4) \cdot P(F_5) = p(1-p)P(P_1) \cdot P(F_2) \cdot P(F_3)$$

puis on réutilise l'indépendance (en sens inverse) pour écrire

$$P((X = 5) \cap F_1) = p(1-p)P(P_1 \cap F_2 \cap F_3) = p(1-p)P(X = 3)$$

- Généralisons (la principale difficulté est celle du choix des notations). Pour tout entier  $p \geq 2$ , on note  $A_k$  l'ensemble des suites de  $k$  tirages pour lesquels on fait  $FF$  pour la première fois à l'issue du  $k$ -ième tirage. Formellement

$$A_k = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_k) \in \{P, F\}^k, (\omega_{k-1}, \omega_k) = (F, F) \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq i \leq k-2, (\omega_i, \omega_{i+1}) \neq (F, F) \right\}$$

On a vu précédemment que

$$(X = k) \cap F_1 = \left\{ \omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}, \quad \omega_1 = F, \quad \omega_2 = P, \quad \text{et} \quad (\omega_p)_{p \geq 3} \in (X = k-2) \right\}$$

ce qui s'écrit encore

$$(X = k) \cap F_1 = \bigcup_{(x_1, \dots, x_{k-2}) \in A_{k-2}} F_1 \cap P_1 \cap X_3 \cap \dots \cap X_k$$

où pour tout  $m \geq 3$ ,  $X_m = F_m$  si  $a_{m-2} = F$  et  $X_m = P_m$  si  $a_{m-2} = P$ . Par réunion disjointe, puis indépendance mutuelle, il vient

$$\begin{aligned} P((X = k) \cap F_1) &= \sum_{(x_1, \dots, x_{k-2}) \in A_{k-2}} P(F_1) \cdot P(P_2) \cdot P(X_3) \cdots P(X_k) \\ &= p(1-p) \sum_{(x_1, \dots, x_{k-2}) \in A_{k-2}} P(X_3) \cdots P(X_k) \end{aligned}$$

Puisque les lancers suivent tous la même loi, on peut écrire

$$P((X = k) \cap F_1) = p(1-p) \sum_{(x_1, \dots, x_{k-2}) \in A_{k-2}} P(Y_1) \cdots P(Y_{k-2})$$

avec cette fois  $Y_m = F_m$  si  $a_m = F$  et  $Y_m = P_m$  sinon. Finalement,

$$P((X = k) \cap F_1) = p(1-p)P(X = k-2)$$

**11**

(\*\*\*)

**Mines PC 2017**

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs entières et  $f$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$ . A quelle condition sur  $f$  les variables aléatoires  $X$  et  $f(X)$  sont-elles indépendantes ?

**Remarque 1 :** Puisque  $X$  est à valeurs entières, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$$

donc nécessairement, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(X = n) \neq 0$ . De plus, s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(X = n) = 1$ , alors  $P(X = m) = 0$  pour tout  $m \neq n$ . Dans ce cas, on dit que  $X$  est presque sûrement constante. Sinon, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(X = n)$  appartient à  $]0; 1[$ . Cette propriété se généralise immédiatement à toute variable aléatoire discrète.

**Remarque 2 :** Quels que soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $y \in (f \circ X)(\Omega)$

$$\begin{aligned}(X = n, f(X) = y) &= \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) = n \quad \text{et} \quad f(X(\omega)) = y\} \\ &= \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) = n \quad \text{et} \quad f(n) = y\} \\ (X = n, f(X) = y) &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } y \neq f(n) \\ (X = n) & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

Par suite, en notant  $\delta_{x,y}$  le symbole de kronecker, il vient

$$P(X = n, f(X) = y) = P(X = n) \cdot \delta_{y, f(n)} \quad (*)$$

Supposons  $X$  et  $f(X)$  indépendantes. Alors, la relation  $(*)$  assure que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $y \in (f \circ X)(\Omega)$ ,

$$P(X = n) \cdot \delta_{y, f(n)} = P(X = n) \cdot P(f(X) = y)$$

Soit donc  $n_0$  tel que  $P(X = n_0) \neq 0$ . En prenant  $y_0 = f(n_0)$ , on obtient

$$P(f(X) = y_0) = 1$$

ce qui prouve que  $f(X)$  est presque sûrement constante.

Réciproquement, on suppose que  $f(X)$  est presque sûrement constante. Soit  $y_0$  tel que  $P(f(X) = y_0) = 1$ . Nécessairement,  $P(f(X) = y) = 0$  pour tout  $y \neq y_0$ . D'après  $(*)$ , il suffit maintenant de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in (f \circ X)(\Omega), \quad P(X = n) \cdot \delta_{y, f(n)} = P(X = n) \cdot P(f(X) = y)$$

On distingue plusieurs cas

- Si  $y \neq f(n)$  et  $y \neq y_0$ , l'égalité est évidente car les deux termes sont nuls.
- Si  $y \neq f(n)$  et  $y = y_0$ , alors  $(X = n)$  est inclus dans  $(f(X) \neq y_0)$  donc de probabilité nulle, et l'égalité s'en déduit aussitôt.
- Si  $y = f(n)$  et  $y \neq y_0$ , on raisonne comme au cas précédent.
- Enfin si  $y = f(n)$  et  $y = y_0$ , l'égalité est évidente car les deux termes sont égaux à  $P(X = n)$ .

Finalement,  $X$  et  $f(X)$  sont bien indépendantes.

Les variables aléatoires  $X$  et  $f(X)$  sont indépendantes si et seulement si  $f(X)$  est presque sûrement constante.

**12** ————— **(\*\*)** ————— **Centrale PC 2017**

Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0; 1[$ . Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . On note  $T_m$  la variable aléatoire donnant le rang du  $m$ -ième succès, c'est-à-dire que

$$T_m = \min \{k \in \mathbb{N}^*, X_1 + \dots + X_k = m\}$$

Déterminer la loi et l'espérance de  $T_m$ .

On peut proposer deux méthodes. La méthode 1 a pour mérite de retrouver « naturellement » la loi en passant par une somme de variables aléatoires, mais il y a beaucoup d'affirmations qui, si elles sont intuitives, sont en réalité très difficiles à justifier simplement. La méthode 2 donne un argument combinatoire pour trouver la loi, mais rend plus difficile le calcul de l'espérance si l'on ne reconnaît pas la série génératrice.

**Méthode 1 :** Posons  $T_0$  la variable aléatoire constante nulle. Par définition, pour tout  $i \geq 1$ , la variable aléatoire  $Y_i = T_i - T_{i-1}$  est le temps d'attente d'un succès pour une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Elle suit donc une loi géométrique de paramètre  $p$ . De plus, par télescopage, on a

$$T_m = \sum_{i=1}^m Y_i$$

Les  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  étant indépendantes, il en est de même des  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ . On a donc par somme de variables aléatoires indépendantes

$$\forall t \in \left] -\frac{1}{p}; \frac{1}{p} \right[ , \quad g_{T_m}(t) = \prod_{i=1}^m g_{Y_i}(t) = \left( \frac{pt}{1-qt} \right)^m \quad \text{et} \quad E(T_m) = \sum_{i=1}^m E(Y_i)$$

A l'aide du développement en série entière de  $z \mapsto 1/(1-z)^m$  et puisque l'espérance d'une loi géométrique vaut  $1/p$ , on trouve

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(T_m = k) = \begin{cases} p^m \cdot q^{k-m} \binom{k-1}{m-1} & \text{si } k \geq m \\ 0 & \text{si } k < m \end{cases} \quad \text{et} \quad E(T_m) = \frac{m}{p}$$

**Méthode 2 :** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a l'union disjointe

$$(T_m = k) = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A_{m,k}} (X_1 = \alpha_1, \dots, X_k = \alpha_k)$$

où  $A_{m,k}$  est l'ensemble des suites à valeurs dans  $\{0, 1\}^k$  contenant  $m$  fois la valeur 1 et dont le dernier terme vaut 1. Cet ensemble est vide si  $k < m$ . Sinon, pour construire une telle suite  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , il suffit de choisir les  $m-1$  valeurs égales à 1 parmi  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ . Ainsi,

$$\text{Card } A_{m,k} = \binom{k-1}{m-1}$$

Par ailleurs, étant donné  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A_{m,k}$ , on a par indépendance

$$P(X_1 = \alpha_1, \dots, X_k = \alpha_k) = \prod_{i=1}^k P(X_i = \alpha_i) = p^m \cdot q^{k-m}$$

car il y a  $m$  termes égaux à  $p$  et  $k-m$  égaux à  $q$  dans ce produit. Finalement,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(T_m = k) = \begin{cases} p^m \cdot q^{k-m} \binom{k-1}{m-1} & \text{si } k \geq m \\ 0 & \text{si } k < m \end{cases}$$

Le calcul de l'espérance peut se faire de plusieurs manières, mais le plus simple reste de reconnaître la série génératrice à l'aide du développement en série entière de  $z \mapsto 1/(1-z)^m$ .

**13** ————— (\*\*) ————— **ENS PC 2017**

Soit  $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, qui suivent une loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ . On pose pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$Q_n = \sum_{k=0}^n \epsilon_k X^k$$

Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $p_n(\alpha)$  la probabilité que  $\alpha$  soit racine de  $Q_n$ .

- Calculer  $p_n(1)$ . Déterminer un équivalent de  $p_{2n-1}(1)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Calculer  $p_n(i)$ .
- Calculer  $p_n(j)$ . Montrer que  $p_n(j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

(a). Par définition, 
$$p_n(1) = P\left(\sum_{k=0}^n \epsilon_k = 0\right)$$

Sachant que  $\epsilon_k$  est à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , la somme  $\epsilon_0 + \dots + \epsilon_n$  est nulle si et seulement si  $n$  est impair et si exactement la moitié des valeurs  $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$  est égal à 1 (et l'autre moitié à  $-1$ ). Par suite,  $p_n(1)$  est nul si  $n$  est pair, et sinon

- Il y a  $\binom{n+1}{(n+1)/2}$  façons de choisir un  $(n+1)$ -uplet  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  d'éléments de  $\{-1, 1\}^n$  dont la moitié des valeurs vaut 1.
- Etant donné un tel  $(n+1)$ -uplet  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ , on a par indépendance mutuelle

$$P((\epsilon_0, \dots, \epsilon_n) = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)) = \prod_{k=0}^n P(\epsilon_k = \alpha_k) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

En particulier, cette valeur est indépendante du  $(n+1)$ -uplet choisi.

Il en résulte que

$$p_n(1) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier,

$$p_{2n-1}(1) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

La formule de Stirling permet alors d'écrire que

$$p_{2n-1}(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4^n} \cdot \frac{\sqrt{4\pi n} (2n/e)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n} (n/e))^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

(b). Cette fois,

$$Q_n(i) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \epsilon_{2k} + i \left( \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \epsilon_{2k+1} \right)$$

Un complexe est nul si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont. Ainsi, par indépendance mutuelle

$$p_n(i) = P \left( \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \epsilon_{2k} = 0 \right) \cdot P \left( \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \epsilon_{2k+1} = 0 \right)$$

Notons que pour tout  $p$ ,  $-\epsilon_p$  suit elle aussi une loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ . On peut donc utiliser le résultat de la question précédente. Par suite, la probabilité  $p_n(i)$  est nul dès lors que  $\lfloor n/2 \rfloor$  ou  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$  est pair. Si l'on note  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par 4 et  $q$  son quotient, alors  $n = 4q + r$  et on vérifie facilement que  $\lfloor n/2 \rfloor$  et  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$  sont tous deux impairs si et seulement si  $r = 3$  ce qui revient à  $n + 1$  multiple de 4. Avec ce qui précède, on a donc

$$p_n(i) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} \left( \frac{(n+1)/2}{(n+1)/4} \right)^2 & \text{si } n+1 \equiv 0[4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c). Dans ce dernier cas, on a

$$\begin{aligned} Q_n(j) &= \sum_{3k \leq n} \epsilon_{3k} + \sum_{3k+1 \leq n} \epsilon_{3k+1} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sum_{3k+2 \leq n} \epsilon_{3k+2} \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \left( \sum_{3k \leq n} \epsilon_{3k} + \frac{1}{2} \sum_{3k+1 \leq n} \epsilon_{3k+1} + \frac{1}{2} \sum_{3k+2 \leq n} \epsilon_{3k+2} \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \sum_{3k+1 \leq n} \epsilon_{3k+1} - \sum_{3k+2 \leq n} \epsilon_{3k+2} \right) \end{aligned}$$

Notons pour simplifier

$$S_0 = \sum_{3k \leq n} \epsilon_{3k} \quad S_1 = \sum_{3k+1 \leq n} \epsilon_{3k+1} \quad S_2 = \sum_{3k+2 \leq n} \epsilon_{3k+2}$$

En séparant à nouveau les parties réelles et imaginaires

$$\begin{aligned} (Q_n(j) = 0) &= \left( S_0 + \frac{1}{2} S_1 + \frac{1}{2} S_2 = 0 \right) \cap (S_1 - S_2 = 0) \\ &= (S_0 + S_1 = 0) \cap (S_1 - S_2 = 0) \end{aligned}$$

Comme dans les questions précédentes, pour avoir  $S_0 + S_1 = 0$ , il faut que la somme comporte un nombre pair de termes, et de même pour  $S_1 - S_2$ . On vérifie facilement qu'il faut que  $n+1$  soit multiple de 3 pour vérifier cette condition (auquel cas  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  comportent toutes  $(n+1)/3$  termes et donc  $S_0 + S_1$  et  $S_1 - S_2$  en comportent  $2(n+1)/3$ ). Dès lors, il est clair que  $S_0$ ,  $S_1$  et  $S_2$  suivent la même loi, toute comme  $-S_0$ ,  $-S_1$  et  $-S_2$ . Notons également que  $S_0$ ,  $S_1$  et  $S_2$  dépendant de variables aléatoires distinctes parmi les  $(X_i)_{i \leq n}$ , elles sont mutuellement indépendantes. Puisque  $S_0$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} (Q_n(j) = 0) &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(S_0 + S_1 = 0) \cap (S_1 - S_2 = 0) \cap (S_0 = k)] \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(S_0 = k) \cap (-S_1 = k) \cap (-S_2 = k)] \end{aligned}$$

puis

$$p_n(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(S_0 = k) \cdot P(S_1 = k) \cdot P(S_2 = k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(S_0 = k)^3$$

14

(\*\*)

Mines PC 2017

Soient  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0; 1[$ . Soit  $N$  une variable aléatoire indépendante des  $X_i$  et suivant une loi de Poisson de paramètre  $a > 0$ . Déterminer la loi de  $Y = X_1 + \dots + X_N$ .

La variable aléatoire  $Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Par la formule des probabilités totales, puis par indépendance, il vient

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((Y = k) \cap (N = n)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X_1 + \dots + X_n = k) \cap (N = n)) \\ P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 + \dots + X_n = k) \cdot P(N = n) \end{aligned}$$

Pour tout entier  $n$ , la variable aléatoire  $X_1 + \dots + X_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$  (somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ ). En particulier, elle est à valeurs dans  $[0; n]$  et  $P(X_1 + \dots + X_n = k) = 0$  lorsque  $k > n$ . On peut donc démarrer la somme à  $k$ . Puisque de son côté  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $a$ , il vient

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \frac{a^n}{n!} \cdot e^{-a} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot a^n \cdot e^{-a} \end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice  $m = n - k$ , il vient

$$P(Y = k) = \frac{p^k}{k!} \cdot e^{-a} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^m \cdot a^{m+k}}{m!}$$

En sortant le terme  $a^k$  de la somme, on reconnaît le développement en série de la fonction exponentielle. Ainsi,

$$P(Y = k) = \frac{p^k}{k!} \cdot e^{-a} \cdot a^k \cdot e^{(1-p)a} = \frac{(p \cdot a)^k}{k!} e^{-p \cdot a}$$

En d'autres termes,

La variable aléatoire  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $p \cdot a$ .

**15**

(\*\*\*)

**ENS PC 2017**

Soit  $p \in ]0; 1[$  et  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$Y_n = \min \{X_1, \dots, X_n\} \quad Z_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$$

puis  $\alpha_n = E(Y_n)$  et  $\beta_n = E(Z_n)$

- Montrer que les suites  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont monotones.
- Exprimer  $\alpha_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer la limite de  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  puis un équivalent de  $\beta_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Dans tout l'exercice, on note  $q = 1 - p$ .

- Il suffit de remarquer que pour tout entier  $n$ , on a par définition  $Y_n \geq Y_{n+1}$  et  $Z_n \leq Z_{n+1}$ . Le résultat s'en déduit immédiatement par croissance de l'espérance.

Les suites  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont monotones (respectivement décroissante et croissante).

- Pour tout  $i$ ,  $X_i$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  donc il en est de même pour  $Y_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Soit  $k \geq 1$ . Remarquons que

$$(Y_n = k) = \left[ \bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k) \right] \setminus \left[ \bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k+1) \right]$$

d'où

$$P(Y_n = k) = P \left[ \bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k) \right] - P \left[ \bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k+1) \right]$$

Or, pour tout entier  $k$ ,  $P(X_i \geq k) = q^{k-1}$  (c'est la probabilité d'obtenir  $k-1$  échecs sur les  $k-1$  premières tentatives). Par indépendance des variables,

$$P \left[ \bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k) \right] = (q^{k-1})^n \quad \text{et} \quad P \left[ \bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k+1) \right] = (q^k)^n$$

et finalement, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} P(Y_n = k) &= (q^{k-1})^n - (q^k)^n \\ &= (q^n)^{k-1} - (q^n)^k \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k P(Y_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left[ (q^n)^{k-1} - (q^n)^k \right] \end{aligned}$$

Or pour tout réel  $\alpha \in ]0; 1[$ ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

En séparant les sommes, il vient ainsi

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k (q^n)^{k-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} k (q^n)^k = \frac{1}{(1-q^n)^2} - \frac{q^n}{(1-q^n)^2} = \frac{1}{1-q^n}$$

Pour conclure

$$E(Y_n) = \frac{1}{1-q^n}$$

**Remarque :** Pour  $n = 1$ , on retrouve l'espérance  $1/p$  d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ . Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $E(Y_n)$  converge vers 1 ce qui est cohérent : plus  $n$  augmente, plus il y a de chances que la valeur minimale des  $X_1, \dots, X_n$  soit égale à 1.

(c). Pour  $Z_n$ , on a cette fois de manière similaire pour tout  $k \geq 1$

$$P(Z_n = k) = P \left[ \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k) \right] - P \left[ \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k-1) \right]$$

avec cette fois pour tout  $i$

$$P(X_i \leq k) = 1 - P(X_i \geq k+1) = 1 - q^k$$

et ainsi

$$P(Z_n = k) = (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n$$

Finalement,

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left[ (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n \right]$$