1 ——— $(*)$ ———

Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n : x \longmapsto nxe^{-nx}\sin x \quad \text{et} \quad g_n : x \longmapsto \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)$$

Pour tout réel x, on a $\quad |\sin x| \leq |x| \quad$ d'où $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leq nx^2e^{-nx}$

Une étude de fonction rapide montre que l'application $x \longmapsto x^2e^{-nx}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint son maximum $4e^{-2}/n^2$ en $x = -2/n$ et $x = -2/n$. Par suite, pour $n \geq 1$,

$$||f_n||_\infty \leq \frac{4e^{-2}}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction nulle.}}$

Il est clair que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g : x \longmapsto \cos x$. En revanche, pour tout entier n,

$$g_n((n+1)\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n \qquad \text{et} \qquad \cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad |(g_n - g)((n+1)\pi)| = 2 \quad$ et donc $\quad ||g_n - g||_\infty \geq 2$

Par conséquent, $\boxed{\text{La suite } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement, mais pas uniformément sur } \mathbb{R}, \text{ vers } g : x \longmapsto \cos x.}$

2 ——— $(**)$ ——— **ENS PC 2016**

(a). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est un polynôme.

(b). Le résultat est-il toujours valable si on remplace $\mathbb{R}$ par $[0;1]$?

(a). Par hypothèse, la suite $(||f_n - f||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang (c'est-à-dire que $f_n - f$ est bornée pour n assez grand) et de limite nulle. En particulier,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \qquad ||f_n - f||_\infty \leq 1$$

et notamment $\quad \forall n \geq N, \quad ||f_{n+1} - f_n||_\infty \leq ||f_{n+1} - f||_\infty + ||f - f_n||_\infty \leq 2$

La fonction $f_{n+1} - f_n$ est donc polynomiale et bornée sur $\mathbb{R}$. Cela n'est possible que si elle est constante. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, il existe un réel α_n tel que

$$f_{n+1} = f_n + \alpha_n$$

et ainsi, pour tout entier $n \geq N$, $\quad f_n = f_N + \sum_{k=N}^{n-1} \alpha_k$

La convergence uniforme, et donc simple, de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ implique la convergence (tout court) de la série de réels $\sum_{n\geq N} \alpha_n$, ce qui permet d'écrire en passant à la limite

$$f = f_N + \sum_{k=N}^{+\infty} \alpha_k$$

Puisque f_N est une fonction polynomiale, et que $\sum_{k=N}^{+\infty} \alpha_k$ est un réel, il s'ensuit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est polynomiale.}}$$

(b). Le résultat n'est plus valable sur $[0;1]$. En effet, toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales (résultat hors-programme, sauf aux ENS). On peut par exemple citer la méthode passant par les polynômes de Bernstein qui consiste à poser

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$$

Il suffit alors de choisir une fonction f qui n'est pas polynomiale, par exemple $f : x \longmapsto \sqrt{x}$, pour obtenir un contre-exemple. A noter qu'il faut tout de même être capable qu'il ne s'agit pas d'une fonction polynomiale, en précisant par exemple qu'elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

3 (***) **Centrale PC 2016**

Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ une fonction continue vérifiant

$$\forall x \in]0;1], \qquad f(x) < x$$

On pose $f_0 = I_d$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$ pour tout entier n. Etudier la convergence simple et la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A-t-on convergence uniforme ?

Commençons par remarquer que $f(0) = 0$ nécessairement. Fixons $x \in [0;1]$ et posons $u_n = f_n(x)$ pour tout entier n. Par hypothèse, pour tout entier n,

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) \leq f_n(x) \qquad \text{soit} \qquad u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$$

avec égalité si et seulement si $u_n = 0$, auquel cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang n. Dans tous les cas, cette suite est décroissante et minorée par 0 donc convergente. Sa limite est alors nécessairement un point fixe de f. Puisque 0 est le seul point fixe, il s'ensuit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle. Ceci étant valable pour tout x, on en déduit que

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } [0;1] \text{ vers la fonction nulle.}}$$

Justifions maintenant que la convergence est uniforme. Fixons $\epsilon > 0$. Par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [0;\eta], \qquad 0 \leq f(x) \leq \epsilon$$

Considérons maintenant $I = [\eta;1]$. L'application $x \longmapsto f(x)/x$ est continue sur le segment I, donc bornée et elle atteint sa borne supérieure m sur ce segment. Il existe donc $x_0 \in I$ tel que

$$\forall x \in I, \qquad \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(x_0)}{x_0} = m$$

Notons que $x_0 \in I \subset]0;1]$, donc $f(x_0)/x_0 < 1$ soit $m < 1$. La majoration précédente se réécrit alors

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leq mx \tag{$\star$}$$

Soit maintenant $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On cherche une condition sur n indépendante de x pour que $0 \leq f_n(x) \leq \epsilon$. On distingue pour cela deux cas :

- si $x \in [0;\eta]$, alors directement $f(x) \leq \epsilon$, puis par décroissance de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, donc $f_n(x) \leq \epsilon$ pour tout $n \geq 1$.
- sinon, on a $f_n(x) > \eta$ et toujours par décroissance de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $f_k(x) > \eta$ soit $f_k(x) \in I$ pour tout $k \in [\![0;n]\!]$. Dès lors,

$$f_n(x) \leq mf_{n-1}(x) \leq m^2 f_{n-2}(x) \leq \cdots \leq m^n f_0(x) = m^n \cdot x \leq m^n$$

Puisque $(m^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, il existe un entier n_0 qui ne dépend que de m (lequel dépend de ϵ, mais pas de x) tel que $m^n \leq \epsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Alors, pour $n \geq n_0$, dans les deux cas, on a $0 \leq f_n(x) \leq \epsilon$, et ce quel que soit $x \in [0;1]$. Le réel ϵ ayant été pris arbitraire,

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } [0;1].}$$

4 (**)

Soit $k \in \mathbb{R}_+$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions k-lipschitziennes définies sur un segment $[a;b]$. Justifier que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f, alors la convergence est uniforme.

Pour tous $x, y \in [a;b]$ et tout entier n, puisque f_n est k-lipschitzienne (avec k indépendant de n),

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|$$

La convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet de passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et d'obtenir

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

Ceci étant valable pour tous x, y, la fonction f est également k-lipschitzienne.

Fixons maintenant $\epsilon > 0$ et considérons un entier $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $(x_0, \ldots, x_p)$ la subdivision régulière de l'intervalle $[a;b]$, définie par $x_k = a + k(b-a)/p$ pour tout $k \in [\![0;p]\!]$. On choisit p suffisamment grand pour que le pas de la subdivision $(b-a)/p$ soit inférieur à $\epsilon/(3k)$ (quitte à remplacer k par $k+1$, on peut supposer k strictement positif). Appliquons la définition de la convergence simple à chaque élément de cette subdivision. Ainsi,

$$\forall k \in [\![0;p]\!], \quad \exists N_k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_k, \qquad |f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \epsilon/3$$

Notons maintenant $N = \max\{N_0, \ldots, N_p\}$ et considérons $n \geq N$. Soit $x \in [a;b]$. Il existe un entier $k \in [\![0;p-1]\!]$ tel que $x \in [x_k;x_{k+1}]$. Dès lors,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)|$$

Le deuxième terme est inférieur à $\epsilon/3$. L'intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ étant de largeur inférieure à $\epsilon/(3k)$, et f et f_n étant k-lipschitziennes, on a de plus

$$|f_n(x) - f_n(x_k)| \leq k\,|x - x_k| \leq \epsilon/3 \qquad \text{et de même} \qquad |f(x) - f(x_k)| \leq \epsilon/3$$

Finalement
$$\forall n \geq N, \quad \forall x \in [a;b]\,, \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Le réel ϵ ayant été pris arbitraire, celui achève la preuve.

$$\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément.}}$$

5 ——— $(*)$ ———

Soit f définie par
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$$

(a). Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b). Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.

(a) Notons pour tout entier n,
$$f_n : x \longmapsto e^{-nx^2}/n^2$$

Il est clair que $||f_n||_\infty = 1/n^2$ ce qui prouve la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$. De plus, f_n est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = -\frac{2x}{n} e^{-nx^2}$$

Une étude rapide des variations de cette fonction montre qu'elle atteint ses extremums en $\pm 1/\sqrt{2n}$ et que

$$||f_n'||_\infty = \sqrt{\frac{2}{e}}\frac{1}{n^{3/2}}$$

On a donc également convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 0} f_n'$ sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation terme à terme s'applique et

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Soit $x > 0$. Alors, par majoration grossière,

$$0 \leq f(x) - e^{-x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-nx^2} = \frac{(e^{-x^2})^2}{1 - e^{-x^2}} = O(e^{-2x^2})$$

d'où
$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x^2}}$$

6 ——— $(*)$ ———

Soit f définie par
$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{x^2 + n^2}$$

(a). Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur celui-ci.

(b). Préciser les limites de f et 0 et $+\infty$.

(a) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f_n : x \longmapsto (-1)^n \frac{x}{x^2 + n^2}$$

La fonction f_0 est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour $n \geq 1$, il est clair que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour calculer sa dérivée d'ordre $p \in \mathbb{N}$, on commence par l'écrire comme une partie réelle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{(x+in)(x-in)} = \frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{x-in} + \frac{1}{x+in}\right] = (-1)^n \operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+in}\right)$$

et ainsi, $$f_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p}p!\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{(x+in)^{p+1}}\right)$$

de sorte que finalement $$\left|\left|f_n^{(p)}\right|\right|_\infty \leq \frac{p!}{n^{p+1}}$$

Cette majoration montre la convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ sur $\mathbb{R}$ et ce, quel que soit $p \geq 1$.

Or, on vérifie immédiatement que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, puisque pour tout réel x, la suite $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle. On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme et conclure que $g = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Puisque $f(x) = g(x) + f_0$, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie et de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$$

(b) Par majoration du reste d'une série alternée, on a

$$\forall x > 0, \qquad |f(x)| \leq f_0(x) = \frac{1}{x}$$

donc f tend vers 0 en $+\infty$. Pour la limite en 0, on utilise la continuité de $g = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ sur $\mathbb{R}$ pour en déduire que g tend vers $g(0) = 0$ en 0. Puisque f_0 tend elle vers $+\infty$, il vient

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de limite } +\infty \text{ en } 0 \text{ et } 0 \text{ en } +\infty.}$$

7 —— $(*)$ —— **Centrale PC 2008**

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n(x) = \frac{f(x^n)}{2^n}$$

(a). Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est normalement convergente. On note S_f sa somme.
Déterminer $S_f(0)$ et $S_f(1)$.

(b). Vérifier que S_f est de classe $\mathcal{C}^1$ si f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(c). On suppose f croissante. Montrer que $S_f \leq f$ et préciser les cas d'égalités.

(a) La fonction f est continue sur le segment $[0;1]$ donc bornée. On en déduit aussitôt que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad ||u_n||_\infty = \frac{||f||_\infty}{2^n}$$

qui est le terme général d'une série convergente. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ est normalement convergente sur } \mathbb{R}.}$$

Il est clair que $u_n(0) = f(0)$ pour tout entier $n \geq 1$, et que de même $u_n(1) = f(1)$. Par suite,

$$S_f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(0)}{2^n} = f(0) \qquad \text{et} \qquad S_f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(1)}{2^n} = f(1)$$

$$\boxed{\forall x \in \{0,1\}\,, \qquad S_f(x) = f(x)}$$

(b) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, il en est de même de u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ avec

$$\forall x \in [0;1]\,, \qquad u_n'(x) = nx^{n-1}f'(x^n)$$

On en déduit immédiatement la majoration

$$||u_n'||_\infty \leq \frac{n}{2^n}\,||f'||_\infty = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et ainsi, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n'$ est normalement convergente. Le théorème de dérivation terme à terme s'applique et prouve notamment que

$$\boxed{\text{La fonction } S_f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1.}$$

(d) Pour tout $x \in [0;1]$, la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Si f est supposée croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x^n) \leq f(x) \qquad \text{d'où} \qquad S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x)}{2^n} = f(x)$$

L'égalité $S_f = f$ n'a lieu que si $f(x^n) = f(x)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in [0;1]$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a $f(x) = f(0)$ par continuité de f, et ce pour tout $x \in [0;1[$. L'égalité reste valable en $x = 1$ par continuité. On peut donc conclure.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est croissante, alors } S_f \leq f \text{ avec égalité si et seulement si } f \text{ est constante.}}$$

8 —— (∗∗) —— **Mines PC 2016**

Montrer que l'application $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable en 0 ?

Notons pour tout entier n
$$f_n : x \longmapsto \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

Il est clair que f_n est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n||_\infty = 1/2^n$ qui est le terme général d'une série convergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. En particulier,

La fonction f est bien définie (et continue) sur $\mathbb{R}$.

Pour la dérivabilité de f en 0, il faut déterminer si l'application $g : x \longmapsto f(x)/x$ admet une limite finie en 0. Remarquons pour cela que tout pour tout entier $p \in \mathbb{N}$,

$$g\left(\frac{\pi}{2^p}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(\pi \cdot 2^{n-p})}{\pi \cdot 2^{n-p}}$$

Mais pour $n \geq p$, 2^{n-p} est un entier donc $\sin(\pi \cdot 2^{n-p})$ est nul. La somme peut donc être réduite à ses p premiers termes, et modulo un changement d'indice $k = p - n$, on obtient

$$g\left(\frac{\pi}{2^p}\right) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\sin(\pi \cdot 2^{n-p})}{\pi \cdot 2^{n-p}} = \sum_{k=1}^{p} \frac{2^k}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$$

Lorsque p tend vers $+\infty$, on a
$$\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \sim \frac{\pi}{2^k} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{2^k}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$$

Le terme général de la série à termes positifs $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{2^k}{\pi} \sin\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right)$ ne tend pas vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ donc la série diverge. Ainsi, $g(\pi/2^p)$ diverge lorsque p tend vers $+\infty$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que g n'a pas de limite en 0^+ et par conséquent,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

9 —— (∗∗) —— **Mines PC 2008**

Etudier la série de fonctions
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

Notons pour tout $n \geq 1$
$$f_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

La série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ en vertu du critère spécial de convergence des séries alternées (pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée, de module décroissant et de limite nulle).
Observons maintenant que f_n est dérivable pour tout entier n avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1} 2x}{(n + x^2)^2}$$

et donc pour tout segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}$,
$$||f_n'||_{\infty,[a;b]} \leq \frac{\max\{|a|\,,|b|\}}{n^2}$$

On a donc convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ et le théorème de dérivation terme à terme s'applique. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La fonction } f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \text{ est définie et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On pourrait sans doute montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$, mais ça m'étonnerais que l'examinateur l'attende.

Il est clair que la fonction f ainsi définie est paire. En vertu de la majoration des restes d'une série alternée, on a l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leq |f_1(x)| = \frac{1}{1+x^2}$$

On en déduit aussitôt que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Pour obtenir un équivalent plutôt qu'une simple majoration, on va regrouper les termes deux par deux pour se ramener à une série dont le terme général est de signe constant. En effet, pour tout $x > 0$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{2n-1}(x) + f_{2n}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+x^2} - \frac{1}{2n-1+x^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+x^2)(2n-1+x^2)}$$

Fixons maintenant x et notons $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{(2t+x^2)(2t-1+x^2)}$

Pour tout $n \geq 1$, on a l'encadrement $\varphi(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \varphi(n)$

En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$ (toutes les séries convergent car chaque terme est un $O(1/n^2)$), on obtient

$$-f(x) - \frac{1}{(2+x^2)(3+x^2)} \leq \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq -f(x) \qquad \text{soit} \qquad -\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq -\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Enfin, $$\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{2t-1+x^2} - \frac{1}{2t+x^2}\right]\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2t-1+x^2}{2t+x^2}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+x^2}{1+x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$$

On peut donc conclure avec l'encadrement précédent.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2}}$$

10 ——— (**) ——— **Centrale PC 2016**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha e^{-nx}}{n^2+1}$$

(a). Déterminer l'ensemble de définition D de f.

(b). Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c). Etudier la convergence normale/uniforme de cette série de fonctions sur D.

(d). La fonction f est-elle dérivable sur D ?

(a). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $$f_n : x \longmapsto \frac{n^\alpha e^{-nx}}{n^2+1}$$

Par croissances comparées, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ pour $x < 0$ et est dominé par $1/n^2$ pour $x > 0$. Pour finir,

$$f_n(0) = \frac{n^\alpha}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

et notamment, $\sum_{n\geq 0} f_n(0)$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+ \text{ si } \alpha < 1 \text{ et sur } \mathbb{R}_+^* \text{ sinon.}}$$

(b). Pour tout entier n, f_n est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $[a;b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$||f_n||_{\infty,[a;b]} = \frac{n^\alpha e^{-na}}{n^2+1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a donc convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$, ce qui permet d'appliquer le théorème de continuité de la somme et donc de conclure que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

(c). Pour tout entier n, toujours par décroissance de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient

$$||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \frac{n^\alpha}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

Le critère de Riemann assure aussitôt que

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ est normalement convergente sur } \mathbb{R}_+ \text{ (resp. } \mathbb{R}_+^*\text{) si et seulement si } \alpha < 1.}$$

La convergence normale implique donc la convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $\alpha < 1$. Pour $\alpha \geq 1$, justifions que pour tout entier N, le reste d'ordre N de la série de fonctions n'est pas borné sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui empêche notamment la convergence uniforme de la série. Soit $A > 0$. Puisque $\sum_{n\geq N} n^\alpha/(1+n^2)$ est divergente, il existe un rang p tel que pour tout $n \geq p$,

$$\sum_{k=N}^{p} \frac{n^\alpha}{n^2+1} \geq 2A$$

Par continuité de la somme partielle $\sum_{n=N}^{p} f_n$ de la série, on a pour x suffisamment petit

$$\sum_{k=N}^{p} \frac{n^\alpha e^{-nx}}{n^2+1} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=N}^{p} \frac{n^\alpha}{n^2+1} \geq A \qquad \text{puis} \qquad \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{n^\alpha e^{-nx}}{n^2+1} \geq \sum_{k=N}^{p} \frac{n^\alpha e^{-nx}}{n^2+1} \geq A$$

Le réel A étant arbitraire, le reste d'ordre N de la série $x \longmapsto \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{n^\alpha e^{-nx}}{n^2+1}$ n'est jamais bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \alpha < 1 \text{ (resp. } \alpha \geq 1\text{), la série } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ est uniformément conver-}\\ \text{gente sur } \mathbb{R}_+ \text{ (resp. n'est pas uniformément convergente sur } \mathbb{R}_+^*\text{).}\end{array}}$$

(d). Il est clair que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout entier n avec

$$\forall x \geq 0, \qquad f_n'(x) = \frac{-n^{\alpha+1}e^{-nx}}{n^2+1}$$

Ainsi, pour tout entier n et tout segment $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$||f_n'||_{\infty,\mathbb{R}_+} = \frac{n^{\alpha+1}}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}} \qquad \text{et} \qquad ||f_n'||_{\infty,[a;b]} = \frac{n^{\alpha+1}e^{-na}}{n^2+1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a donc pas nécessairement convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ (seulement si $\alpha < 0$) mais convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{\alpha+1}e^{-nx}}{n^2+1}$$

On montre alors de la même manière qu'à la question précédente que f' est de limite $-\infty$ en 0^+ lorsque la série $\sum_{n\geq 0} n^{\alpha+1}/(n^2+1)$ diverge, c'est-à-dire lorsque $\alpha \geq 0$. On peut donc conclure que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \alpha < 0 \text{ La fonction } f \text{ est définie et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+. \text{ Si } \alpha \in [0;1[, \text{ elle est définie sur } \mathbb{R}_+,\\ \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ mais n'est pas dérivable en 0. Enfin, si } \alpha > 1, \text{ elle est définie et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.\end{array}}$$

11 — (⋆⋆) — **Mines PC 2016**

Pour tout réel x, on pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

(a). Etudier la convergence de cette série.

(b). Montrer que la fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

(c). Déterminer la limite de f en $+\infty$. On admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(d). Déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

(a). Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ $$f_n : x \longmapsto \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

Il est clair que $||f_n||_\infty = \dfrac{\pi}{2n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. En particulier,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie (et continue) sur } \mathbb{R}.}$$

(b). Il est clair que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Ainsi, pour tout segment $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$||f_n||_{\infty,[a;b]} \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \sim \frac{1}{a^2n^3}$$

On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme puisque

- La série de fonction $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est normalement donc simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La série de fonction $\sum\limits_{n\geq 0} f_n'$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème s'applique et prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}^*$ par imparité.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$$

(c). Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n admet $\pi/(2n^2)$ pour limite en $+\infty$. Comme la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème d'interversion limite/somme et conclure que

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2}$$

soit avec le résultat admis, $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de limite } \frac{\pi^3}{12} \text{ en } +\infty.}$$

(d). Le théorème de dérivation terme à terme assure que pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Fixons $x > 0$ et considérons $$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t(1+t^2x^2)} \end{array}$$

L'application φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$,

$$\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \varphi(n) \leq \int_{n-1}^{n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

En sommant cet encadrement pour allant de 2 à $+\infty$, on obtient par la relation de Chasles

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)} \leq f'(x) - \frac{1}{1+x^2} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)}$$

Pour $\alpha \in \{1,2\}$, l'intégrale se calcule après une décomposition en éléments simples

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)} &= \int_\alpha^{+\infty} \left[\frac{1}{t} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right] \mathrm{d}t \\ &= \left[\ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2x^2)\right]_\alpha^{+\infty} \\ &= \left[\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2t^2}}\right)\right]_\alpha^{+\infty} \\ \int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)} &= -\ln x - \ln\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+x^2\alpha^2}}\right)\end{aligned}$$

Dans tous les cas, $$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x$$

et finalement, par encadrement $$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x}$$

12 —— (**) —— **Mines MP 2004**

Pour tout $x > 1$, on pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(x+n)}$$

(a). Montrer que f est définie, continue et positive sur $]1;+\infty[$.

(b). Montrer que f est dérivable et strictement décroissante.

(c). Calculer $f(x+1)+f(x)$. En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\ln x}$.

(d). Trouver un équivalent en $+\infty$ de $f(x) - \dfrac{1}{2\ln x}$.

Pour tout entier n, on note
$$f_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n}{\ln(x+n)}$$

(a). Pour tout $x > 1$, la suite $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle. Le critère de convergence des séries alternées s'applique et prouve la convergence de la série associée. Ainsi, f est bien définie sur $]1;+\infty[$. De plus, toujours d'après les résultats sur les séries alternées, si l'on note pour $N \in \mathbb{N}$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \qquad \text{et} \qquad R_N(x) = \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)$$

alors $R_N(x)$ est du signe de son premier terme $f_N(x)$. En particulier, $f(x)$ est du signe de $f_0(x) = 1/\ln(x)$ donc positif. Enfin,

$$|f(x) - S_N(x)| = |R_{N+1}(x)| \leq f_N(x) = \frac{1}{\ln(x+N+1)} \qquad \text{d'où} \qquad ||f - S_N||_\infty \leq \frac{1}{\ln(N+1)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

On a donc convergence uniforme de la série de fonctions continues $\sum_{n\geq 0} f_n$, donc d'après le théorème de continuité de la somme,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie, continue et positive sur }]1;+\infty[.}$$

(b). Pour tout entier n, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x > 1, \qquad f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)\ln(x+n)^2}$$

On prouve de la même manière qu'à la première question que la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur $]1;+\infty[$. Le théorème de dérivation terme à terme s'applique (on avait déjà vu la convergence simple de $\sum_{n\geq 0} f_n$), et prouve que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]1;+\infty[$, de dérivée

$$f' : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)\ln(x+n)^2}$$

Cette somme alternée est du signe de son premier terme, soit $f_0' : x \longmapsto -1/(x(\ln x)^2)$, et donc négative. Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1;+\infty[\text{ et décroissante.}}$$

(c). En utilisant le changement d'indice $p = n+1$, on obtient

$$f(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln((x+1)+n)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{\ln(x+p)} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\ln(x+p)}$$

On reconnaît la somme définissant $f(x)$ privée de son premier terme de sorte que

$$f(x+1) = -\left(f(x) - \frac{1}{\ln x}\right)$$

et donc
$$\boxed{\forall x > 1, \qquad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{\ln x}}$$

Pour en déduire un équivalent de $f(x)$, notons que par décroissance de f sur $]1;+\infty[$, pour tout $x > 1$,

$$f(x+2) \leq f(x+1) \leq f(x)$$

En exprimant $f(x+2)$ en fonction de $f(x+1)$ (grâce à (c)), puis $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$, il vient

$$f(x) - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln(x+1)} \leq \frac{1}{\ln x} - f(x) \leq f(x)$$

ce qui s'écrit encore
$$\frac{1}{2\ln x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2\ln(x+1)}$$

Les deux termes de cet encadrement sont équivalents à $1/(2\ln x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui permet d'en déduire que

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\ln x}}$$

(d). Pour déterminer un équivalent de $f(x) - 1/(2\ln x)$, commençons par écrire cette quantité sous la forme d'une série alternée. On peut pour cela écrire que

$$f(x) - \frac{1}{2\ln x} = \frac{1}{2\ln x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(x+n)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(x+n)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(x+n)}$$

En effectuant le changement d'indice $p = n-1$ dans la deuxième somme, il vient

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2\ln x} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(x+n)} - \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\ln(x+p+1)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\ln(x+n)} - \frac{1}{\ln(x+n+1)}\right] \end{aligned}$$

On pose donc pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$g_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{\ln(x+n)} - \frac{1}{\ln(x+n+1)}\right]$$

de sorte qu'il suffit maintenant de chercher un équivalent en $+\infty$ de la somme de la série de fonctions alternée

$$g : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$$

Pour ce faire, le travail est exactement le même que celui de f, en justifiant les résultats suivants :

(i) A $x > 1$ fixé, Les suites $(|g_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|g_n'(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes de limite nulle ;

(ii) Pour $x > 1$, $\qquad g(x+1) + g(x) = g_0(x) \qquad$ et $\qquad g_1(x) + g_0(x) = o(g_0(x))$

Le (i) sert à établir comme pour f que g est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée négative donc décroissante. Le (ii) permet de reprendre la preuve de l'équivalent de f et d'en déduire ici que $g(x) \sim g_0(x)/2$. Un équivalent simple de $g_0(x)$ s'obtient en mettant la différence des deux inverses au même dénominateur. Toutes justifications faites, il vient

$$\boxed{f(x) - \frac{1}{2\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4x(\ln x)^2}}$$

Remarque : Pour justifier (i), l'argument le plus simple est la convexité de la fonction $h : u \longmapsto 1/\ln(u)$ et la concavité de sa dérivée sur $]1;+\infty[$ qui assure que pour tous réels $a, b > 0$,

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{h(a)+h(b)}{2} \qquad \text{et} \qquad h'\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{h'(a)+h'(b)}{2}$$

et il n'y a plus qu'à l'appliquer pour $a = x+n$ et $b = x+n+2$. Cette notion étant dorénavant hors-programme, on peut se rabattre sur des études de fonctions, mais c'est beaucoup plus lourd.

13 ——— (∗∗∗) ——— **ENS PC 2016**

(a). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère une suite $(a_k(n))_{n\in N}$ convergente de limite $b_k \in \mathbb{R}$. On fait les hypothèses suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + a_k(n))$ converge.
- Il existe une suite de réels positifs $(m_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tels que $\sum_{k\geq1} m_k$ converge et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_k(n)| \leq m_k$$

Montrer que $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + b_k)$ converge et que $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + a_k(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + b_k)$

(b). Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout réel x

$$\sin((2m+1)x) = (2m+1)\sin x \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\pi/(2m+1))}\right)$$

(c). Montrer que pour tout réel x $$\sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right)$$

(a). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, $|a_k(n)| \le m_k$ pour tout entier n et $(a_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite b_k, donc par passage à la limite

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad |b_k| \le m_k$$

Mais puisque $\sum\limits_{k\ge 1} m_k$ converge, son terme général tend vers 0 donc par majoration, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle et

$$\ln(1+b_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} b_k$$

Le théorème de comparaison prouve alors que $\sum\limits_{k\ge 0} \ln(1+b_k)$ est convergente et donc

$$\sum_{k=1}^{N} \ln(1+b_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{N}(1+b_k)\right)$$

admet une limite lorsque N tend vers $+\infty$. En passant à l'exponentielle, on en déduit que

$$\boxed{\text{Le produit } \prod_{k=1}^{+\infty}(1+b_k) \text{ est convergent.}}$$

Fixons maintenant $r \in \mathbb{N}$. Pour tout entier n, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{+\infty}(1+a_k(n)) - \prod_{k=1}^{+\infty}(1+b_k) &= \left[\prod_{k=1}^{+\infty}(1+a_k(n)) - \prod_{k=1}^{r}(1+a_k(n))\prod_{k=r+1}^{+\infty}(1+b_k)\right] \\
&\qquad + \left[\prod_{k=1}^{r}(1+a_k(n))\prod_{k=r+1}^{+\infty}(1+b_k) - \prod_{k=1}^{+\infty}(1+b_k)\right] \\
&= \prod_{k=1}^{r}(1+a_k(n))\left[\prod_{k=r+1}^{+\infty}(1+a_k(n)) - \prod_{k=r+1}^{+\infty}(1+b_k)\right] \\
&\qquad + \left[\prod_{k=1}^{r}(1+a_k(n)) - \prod_{k=1}^{r}(1+b_k)\right]\prod_{k=r+1}^{+\infty}(1+b_k)
\end{aligned}$$

Analysons les quatre termes ainsi mis en évidence :

(1) La quantité $\prod\limits_{k=1}^{r}(1+a_k(n))$ peut être majorée indépendamment de r et de n en remarquant que

$$\left|\prod_{k=1}^{r}(1+a_k(n))\right| \le \prod_{k=1}^{r}(1+|a_k(n)|) \le \prod_{k=1}^{r}(1+m_k) \le \prod_{k=1}^{+\infty}(1+m_k)$$

le produit infini étant convergent pour les mêmes raisons que $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$. On notera M ce majorant.

(2) La quantité $\left[\prod\limits_{k=1}^{r}(1+a_k(n)) - \prod\limits_{k=1}^{r}(1+b_k)\right]$ est de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$ puisque le produit est fini et que $a_k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b_k$.

(3) Le terme $\prod\limits_{k=r+1}^{+\infty}(1+b_k)$ est une constante indépendante de n.

(4) Le dernier terme $\left[\prod\limits_{k=r+1}^{+\infty}(1+a_k(n)) - \prod\limits_{k=r+1}^{+\infty}(1+b_k)\right]$ est le plus délicat à étudier proprement. On va justifier que si on fixe $\epsilon > 0$, alors pour r assez grand, les deux produits sont dans l'intervalle $[1-\epsilon; 1+\epsilon]$ et leur différence est donc inférieure en valeur absolue à 2ϵ, le tout indépendamment de la valeur de n. On passe pour cela par le logarithme de ces produits.

- Puisque $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$, il existe $\rho > 0$ tel que $|\ln(1+t)| \le 2\,|t|$ pour tout $|t| < \rho$.
- Puisque $m_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, il existe un rang k_0 tel que $m_k < \rho$ pour tout $k \ge k_0$. Alors,
$$\forall k \ge k_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_k(n)| \le m_k < \rho \qquad \text{et} \qquad |\ln(1+a_k(n))| \le 2\,|a_k(n)| \le m_k$$
et enfin
$$\forall r \ge k_0, \qquad \left|\sum_{k=r+1}^{+\infty} \ln(1+a_k(n))\right| \le 2 \sum_{k=r+1}^{+\infty} m_k$$
- Le reste d'une série convergente étant de limite nulle, pour tout $\delta > 0$, on peut choisir r suffisamment grand pour que $2\sum\limits_{k=r+1}^{+\infty} m_k \le \delta$ et alors pour tout entier n,
$$-\delta \le \sum_{k=r+1}^{+\infty} \ln(1+a_k(n)) \le \delta \qquad \text{d'où} \qquad e^{-\delta} \le \prod_{k=r+1}^{+\infty} (1+a_k(n)) \le e^{\delta}$$
Puisque $|b_k| \le m_k$, on a de la même manière
$$e^{-\delta} \le \prod_{k=r+1}^{+\infty} (1+b_k) \le e^{\delta}$$
- Il ne reste plus qu'à choisir δ suffisamment petit pour que $e^{-\delta} > 1-\epsilon$ et $e^{\delta} < 1+\epsilon$ (ce qui est toujours possible si ϵ est fixé strictement positif). Alors les deux produits sont bien dans $[1-\epsilon; 1+\epsilon]$ et leur différence est majorée par 2ϵ.

On prouve maintenant le résultat de la manière suivante :

- On commence par fixer $\epsilon > 0$ puis r assez grand tel que le terme $(\mathbf{4})$ soit majoré par ϵ/M. Le produit des termes $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{4})$ est alors majoré par ϵ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
- Une fois r ainsi fixé, le produit des termes $(\mathbf{2})$ et $(\mathbf{3})$ est celui d'une constante et d'un terme de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Par suite, pour n assez grand, il est majoré ϵ également.
- Finalement, pour n assez grand,
$$\left|\prod_{k=1}^{+\infty}(1+a_k(n)) - \prod_{k=1}^{+\infty}(1+b_k)\right| \le 2\epsilon$$

Conclusion :
$$\boxed{\prod_{k=1}^{+\infty}(1+a_k(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \prod_{k=1}^{+\infty}(1+b_k)}$$

(b). Soit $m \in \mathbb{N}$. Le polynôme $X^{2m+1}-1$ est scindé à racines simples dans C et ses racines sont les racines $(2m+1)$-ième de l'unité. On a donc
$$X^{2m+1} - 1 = \prod_{k=0}^{2m} (X - e^{2ik\pi/(2m+1)})$$
La seule racine réelle est 1 (pour $k=0$), les autres sont des complexes non réels que l'on peut regrouper par paire de complexes conjugués (le conjugué du terme d'indice k est celui d'indice $2m+1-k$). Ainsi,
$$\begin{aligned} X^{2m+1} - 1 &= (X-1)\prod_{k=1}^{m}(X - e^{2ik\pi/(2m+1)})(X - e^{-2ik\pi/(2m+1)}) \\ &= (X-1)\prod_{k=1}^{m}\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k}{2m+1}\right) + 1\right) \end{aligned}$$
Remarquons maintenant que pour tout réel x,
$$\sin((2m+1)x) = \frac{1}{2i}\left(e^{(2m+1)ix} - e^{-(2m+1)ix}\right) = \frac{e^{-(2m+1)ix}}{2i}\left((e^{2ix})^{2m+1} - 1\right)$$
On peut donc utiliser la factorisation précédente ce qui donne
$$\sin((2m+1)x) = \frac{e^{-(2m+1)ix}}{2i}\left(e^{2ix} - 1\right)\prod_{k=1}^{m}\left((e^{2ix})^2 - 2e^{2ix}\cos\left(\frac{2k}{2m+1}\right) + 1\right)$$
En récrivant que $e^{-(2m+1)x} = e^{-ix}(e^{-2ix})^m$ et en « distribuant » ces exponentielles dans les produits, il vient
$$\sin((2m+1)x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\prod_{k=1}^{m}\left(e^{2ix} - 2\cos\left(\frac{2k}{2m+1}\right) + e^{-2ix}\right)$$

soit $$\sin((2m+1)x) = \sin x \prod_{k=1}^{m} \left(2\cos x - 2\cos\left(\frac{2k}{2m+1}\right)\right)$$

Sachant que $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ pour tout réel α, on aboutit à

$$\begin{aligned}\sin((2m+1)x) &= \sin x \prod_{k=1}^{m} \left[4\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) - \sin^2 x\right)\right]\\ &= \sin x \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\pi/(2m+1))}\right)\prod_{k=1}^{m}\left[4\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à démonter l'égalité

$$\prod_{k=1}^{m}\left[4\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\right] = 2m+1$$

Il y a plusieurs méthode, mais autant utiliser l'égalité précédente. Notons $K = \prod_{k=1}^{m}\left[4\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\right]$ puis

$$f : x \longmapsto \sin((2m+1)x) \qquad g : x \longmapsto \sin x \qquad \text{et} \qquad \forall k,\quad h_k : x \longmapsto 1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\pi/(2m+1))}$$

On a établit que $$f = K\cdot g\cdot \prod_{k=1}^{m} h_k \qquad \text{d'où} \qquad f' = K\cdot g' \prod_{k=1}^{m} h_k + K\cdot g\cdot\left[\sum_{i=1}^{k} h_i' \prod_{k\neq i} h_k\right]$$

En appliquant cette égalité en 0, et en remarquant que

$$f'(0) = 2m+1 \qquad g'(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k,\quad h_k'(0) = 0$$

on obtient finalement que $$K = 2m+1$$

et finalement $$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sin((2m+1)x) = (2m+1)\sin x\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\pi/(2m+1))}\right)}$$

(c). En remplçant x par $x/(2m+1)$ dans l'égalité précédente, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $m\in\mathbb{N}$,

$$\sin(x) = (2m+1)\sin\left(\frac{x}{2m+1}\right)\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2(x/(2m+1))}{\sin^2(k\pi/(2m+1))}\right)$$

Posons donc $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \forall m\in\mathbb{N},\qquad a_k(m) = \begin{cases} -\dfrac{\sin^2(x/(2m+1))}{\sin^2(k\pi/(2m+1))} & \text{si } k\leq m\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On a clairement compte tenu de l'équivalent $\sin t \sim t$ en 0 que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad a_k(m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} -\frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

Pour la majoration, on utilise l'encadrement $(2/\pi)\cdot t \leq \sin t \leq t$ valable sur $[0;\pi/2]$ pour en conclure que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \forall n\in\mathbb{N},\qquad |a_k(n)| \leq \frac{x^2/(2m+1)^2}{(2/\pi)^2(k\pi/(2m+1))^2} = \frac{x^2}{4k^2}$$

Le résultat de la première question s'applique et prouve que

$$\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2(x/(2m+1))}{\sin^2(k\pi/(2m+1))}\right) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + a_k(m)) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right)$$

et donc, puisque $(2m+1)\sin(x/(2m+1))$ converge lui vers x lorsque m tend vers $+\infty$,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right)}$$

14 ——— (**) ———

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par récurrence par

$$f_0 \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R}), \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in[a;b], \qquad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

(a). Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a;b]$.

(b). On note S la somme de la série précédente. Montrer que S satisfait la relation

$$\forall x \in [a;b]\,, \qquad S(x) = f_0(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f_0(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) La fonction f_0 est continue sur le segment $[a;b]$ donc bornée. On peut ainsi majorer grossièrement f_1 de la manière suivante :

$$\forall x \in [a;b]\,, \qquad |f_1(x)| = \left|\int_a^x f_0(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^x ||f_0||_\infty\,\mathrm{d}t = ||f_0||_\infty\,(x-a)$$

Par une récurrence immédiate, on trouve plus généralement la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a;b]\,, \qquad |f_n(x)| \leq ||f_0||_\infty \frac{(x-a)^n}{n!} \qquad \text{d'où} \qquad ||f_n||_\infty \leq ||f_0||_\infty \frac{(b-a)^n}{n!}$$

Cette majoration suffit pour conclure.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ est normalement convergente sur } [a;b].}$$

(b) Par définition de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n' = f_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. Le résultat précédent montre alors que la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est normalement convergente sur $[a;b]$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme à sa somme $R = S - f_0$. Ainsi, T est dérivable de dérivée

$$R' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = R + f_0$$

On en déduit que R est une solution de l'équation différentielle du premier ordre à coefficient constant avec second membre

$$y' - y = f_0 \tag{$\star$}$$

On résout cette équation par la méthode de la variation de la constante. Les solutions de l'équation sans second membre sont de la forme $x \longmapsto e^x$. On cherche une solution particulière de la forme $x \longmapsto \lambda(x)e^x$ avec $\lambda : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Une telle fonction est solution si et seulement si

$$\forall x \in [a;b]\,, \qquad (\lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x) - \lambda(x)e^x = f_0(x) \qquad \text{soit} \qquad \lambda'(x) = f_0(x)e^{-x}$$

Une solution particulière est finalement donnée par $x \longmapsto \int_a^x f_0(u)e^{-u}\,\mathrm{d}u$ et ainsi, il existe un réel c tel que

$$\forall x \in [a;b]\,, \qquad R(x) = ce^x + e^x \int_a^x f_0(u)e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Mais puisque R s'annule en a (car f_n s'annule en a pour $n \geq 1$), on en déduit que $c = 0$ ce qui détermine R et donc S.

$$\boxed{\forall x \in [a;b]\,, \qquad S(x) = f_0(x) + e^x \int_a^x f_0(u)e^{-u}\,\mathrm{d}u}$$