PROBLEME

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.
On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier k, X_k est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Partie A

1. Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.
2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :
$$P\big([X_2 = 1]\big) = \frac{1}{6}, \qquad P\big([X_2 = 2]\big) = \frac{2}{3}, \qquad P\big([X_2 = 3]\big) = \frac{1}{6}.$$
3. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.
4. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer $P_{[X_k=j]}\big([X_{k+1} = i]\big)$.
(On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de i et j).
5. Déduire de ce qui précède que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P\big([X_{k+1} = i]\big) = \frac{i}{k+2} P\big([X_k = i]\big) + \frac{3+k-i}{k+2} P\big([X_k = i-1]\big). \qquad (*)$$
6. À l'aide de la formule $(*)$, déterminer la loi de X_3.

7.(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $P\big([X_k = 1]\big) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.

(b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $P\big([X_k = k+1]\big)$.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times P\big([X_k = 2]\big)$.
Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
Montrer que la suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.
En déduire alors que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ P\big([X_k = 2]\big) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

Partie D

14. Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par :

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & jP(X+1) - iP(X) \end{array}.$$

(a) Montrer que $\varphi_{i,j}$ est linéaire.

(b) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$.

(c) En déduire que $\varphi_{i,j}$ est injective.

(d) Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi_{i,j}(Q) = P$.
(Pour P non nul, on pourra s'intéresser à la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ où n est le degré de P).

Ce qui précède montrant que $\varphi_{i,j}$ est un automorphisme, on définit le polynôme $P_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant j \leqslant i$, en posant :

$$P_{1,1}(X) = 1, \qquad \text{et pour } 1 \leqslant j < i, \quad P_{i,j}(X) = \varphi_{i,j}^{-1}\left((3 + X - i)P_{i-1,j}(X)\right),$$

et enfin pour tout entier $i > 1$,

$$P_{i,i}(X) = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0).$$

15.(a) Vérifier que : $P_{2,1}(X) = -X - 2$, puis calculer $P_{2,2}(X)$.

(b) Vérifier que : $P_{3,2}(X) = -2X - 4$.
On admettra dans la suite que : $P_{3,1}(X) = \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{3}{2}X + 1$ et $P_{3,3}(X) = 3$.

Tournez la page s.v.p.

16. On considère, pour tout entier i de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante :

$$\mathcal{H}_i \ : « \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}\big([X_k = i]\big) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k) j^k \ ».$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_i$ est vraie.

(a) Montrer que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

(b) Soit $i > 1$. On suppose que $\mathcal{H}_{i-1}$ est vraie et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \alpha_k = (k+1)!\mathbb{P}\big([X_k = i]\big) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k.$$

En utilisant la formule $(*)$ et la relation $(3 + X - i)P_{i-1,j}(X) = \varphi_{i,j}\left(P_{i,j}(X)\right)$, montrer que la suite $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$ est géométrique.
Déterminer α_0 et en déduire que $\mathcal{H}_i$ est vraie.

(c) Conclure.

17.(a) En utilisant le résultat de la question 15(a), retrouver le résultat de la question 7(c).

(b) Déterminer $\mathbb{P}\big([X_k = 3]\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

●