

I. PRÉLIMINAIRES

I.A.1 L'entier naturel non nul p est fixé. Donc $p \geq 1$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u(n, p) = \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Donc, d'après le théorème de comparaison pour les séries positives,

Si $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente.

I.A.2 On cherche ici à calculer la somme $\sigma(1)$ de la série convergente

$$\sum_{n \geq 1} u(n, 1) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

La fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)}$ s'écrit comme différence de deux fractions simples.

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

Or, $\sigma(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. Et si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

On en déduit

$\sigma(1) = 1$

I.A.3 Soient $p \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u(n, p-1) - u(n+1, p-1) &= \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p-1)} - \frac{1}{(n+1) \cdots (n+p)} \\ &= \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p)} \end{aligned}$$

d'où

$\forall p \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u(n, p-1) - u(n+1, p-1) = p u(n, p)$

I.A.4 La série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente de somme $\sigma(p)$ pour tout entier $p \geq 1$,

ce qui permet d'obtenir $\sigma(p)$ comme limite de la suite des sommes partielles. Pour $p \geq 2$, on applique l'égalité obtenue à la question I.A.3 pour calculer les sommes partielles. Soit $N \geq 1$, il vient

$$\sum_{n=1}^N [u(n, p-1) - u(n+1, p-1)] = p \sum_{n=1}^N u(n, p)$$

De plus,

$$\sum_{n=1}^N [u(n, p-1) - u(n+1, p-1)] = \sum_{n=1}^N u(n, p-1) - \sum_{n=1}^{N+1} u(n, p-1) + u(1, p-1)$$

Finalement, $\sum_{n=1}^N u(n, p-1) - \sum_{n=1}^{N+1} u(n, p-1) + u(1, p-1) = p \sum_{n=1}^N u(n, p)$

Après passage à la limite dans l'égalité précédente en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\sigma(p-1) - \sigma(p-1) + \frac{1}{p!} = p \sigma(p)$$

et on en conclut

$$\sigma(p) = \frac{1}{p! p}$$

I.B Considérons un entier q avec $q \geq 2$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^q}$ est alors convergente. De plus, la fonction $t \mapsto 1/t^q$ est définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Si n est un entier strictement positif, on a pour $n \leq t \leq n+1$,

$$\frac{1}{(n+1)^q} \leq \frac{1}{t^q}$$

Intégrons ensuite cette expression sur l'intervalle $[n; n+1]$ pour obtenir l'inégalité

$$\frac{1}{(n+1)^q} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^q}$$

L'entier q étant supérieur à 2, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^q}$ converge et l'expression $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^q}$ est le terme général d'une série convergente. Soit $N \geq 1$. Sommons alors l'inégalité précédente pour $n \geq N$, toutes les séries étant convergentes. Il vient

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^q} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^q}$$

On en déduit une majoration du reste $R(N, q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$,

$$R(N, q) \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^q}$$

d'où

$$R(N, q) \leq \frac{1}{q-1} \frac{1}{N^{q-1}}$$

Cette question est très classique. Elle est fréquemment posée aux épreuves de différents concours et doit absolument être maîtrisée. Dans cette question, on ne demandait qu'une majoration du reste de la série. Les inégalités obtenues permettent également d'en donner un équivalent. En effet, l'inégalité initiale peut être obtenue des deux côtés. Si n est un entier strictement positif et t un réel compris entre n et $n+1$, on a

$$\frac{1}{(n+1)^q} \leq \frac{1}{t^q} \leq \frac{1}{n^q}$$

Encadrons le reste $R(N, q)$ comme suit si $N \geq 2$

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^q} \leq R(N, q) \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^q}$$

Or,
$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^q} = \frac{1}{q-1} \frac{1}{(N+1)^{q-1}} \quad \text{et} \quad \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^q} = \frac{1}{q-1} \frac{1}{N^{q-1}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{De plus,} \\ \text{d'où} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{1}{N^{q-1}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(N+1)^{q-1}} \\ R(N, q) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{q-1} \frac{1}{N^{q-1}} \end{array}$$

II. UN EXEMPLE D'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE

II.A.1 et II.A.2 Définissons tout d'abord par récurrence trois suites de nombres réels $(a_p)_{p \geq 2}$, $(b_p)_{p \geq 2}$ et $(c_p)_{p \geq 2}$ en posant

$$a_2 = 1 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 2$$

et si $p \geq 2$

$$a_{p+1} = b_p \quad b_{p+1} = c_p + (p+1)b_p \quad c_{p+1} = (p+1)c_p$$

Les trois suites $(a_p)_{p \geq 2}$, $(b_p)_{p \geq 2}$ et $(c_p)_{p \geq 2}$ sont bien définies. De plus, une récurrence rapide montre que si $p \geq 2$, les nombres a_p , b_p et c_p sont des entiers naturels.

Montrons maintenant par récurrence que la propriété suivante

$$\mathcal{P}(p) : \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^p \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)\dots(x+p)}$$

est vraie pour tout $p \geq 2$.

- $\mathcal{P}(2)$: soit $x > 0$. On a alors

$$\frac{a_2}{x(x+1)(x+2)} + \frac{b_2 x + c_2}{x^3(x+1)(x+2)} = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x^3}$$

La propriété $\mathcal{P}(2)$ est donc vraie.

- $\mathcal{P}(p) \implies \mathcal{P}(p+1)$: soient $p \geq 2$ et $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{p+1} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_{p+1} x + c_{p+1}}{x^3(x+1)\dots(x+p+1)} \\ &= \sum_{k=2}^p \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{a_{p+1}}{x(x+1)\dots(x+p+1)} \\ & \quad + \frac{b_{p+1} x + c_{p+1}}{x^3(x+1)\dots(x+p+1)} \\ &= \sum_{k=2}^p \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x^2 + (c_p + (p+1)b_p)x + c_p(p+1)}{x^3(x+1)\dots(x+p+1)} \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(p)$ étant vraie

$$\sum_{k=2}^p \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} = \frac{1}{x^3} - \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)\dots(x+p)}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad & \sum_{k=2}^{p+1} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_{p+1}x + c_{p+1}}{x^3(x+1)\dots(x+p+1)} \\ &= \frac{1}{x^3} + \frac{b_p x^2 + (c_p + (p+1)b_p)x + c_p(p+1) - (b_p x + c_p)(x+p+1)}{x^3(x+1)\dots(x+p+1)} \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=2}^{p+1} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_{p+1}x + c_{p+1}}{x^3(x+1)\dots(x+p+1)} = \frac{1}{x^3}$$

La propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est ainsi vérifiée.

- Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(p)$ est ainsi vérifiée pour tout $p \geq 2$.

Il existe trois suites $(a_p)_{p \geq 2}$, $(b_p)_{p \geq 2}$ et $(c_p)_{p \geq 2}$ d'entiers naturels définies par

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 2 \end{cases} \quad \text{et pour } p \geq 2, \quad \begin{cases} a_{p+1} = b_p \\ b_{p+1} = c_p + (p+1)b_p \\ c_{p+1} = (p+1)c_p \end{cases}$$

telles que

$$\forall x > 0 \quad \forall p \geq 2 \quad \frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^p \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)\dots(x+p)}.$$

Les trois suites a, b et c ont été trouvées par un raisonnement de type analyse-synthèse, les formules ne pouvant pas se deviner aisément. Pour $p = 2$, on cherche trois réels α, β et γ pour que pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{x^3} = \frac{\alpha}{x(x+1)(x+2)} + \frac{\beta x + \gamma}{x^3(x+1)(x+2)}$$

Cette égalité se réécrit
$$\frac{1}{x^3} = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^3(x+1)(x+2)}$$

soit
$$(x+1)(x+2) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

ou encore
$$x^2 + 3x + 2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Or, un polynôme de degré 2 a au plus deux racines et l'égalité

$$(1 - \alpha)x^2 + (3 - \beta)x + (2 - \gamma) = 0$$

doit être vérifiée pour tout $x > 0$. Il s'agit donc du polynôme nul et on trouve

$$\alpha = 1 \quad \beta = 3 \quad \gamma = 2$$

Pour trouver la relation de récurrence entre a_{p+1} , b_{p+1} , c_{p+1} et a_p , b_p , c_p dans le cas général où $p \geq 2$, on raisonne également par analyse-synthèse en supposant l'existence des réels a_{p+1} , b_{p+1} , c_{p+1} et en supposant que la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est vérifiée. On a alors

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p+1} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_{p+1}x + c_{p+1}}{x^3(x+1)\dots(x+p+1)}$$

On compare cette égalité avec celle correspondant au rang p et on remarque que les trois réels a_{p+1} , b_{p+1} et c_{p+1} doivent vérifier l'égalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)\dots(x+p)} = \frac{a_{p+1}}{x(x+1)\dots(x+p+1)} + \frac{b_{p+1}x + c_{p+1}}{x^3(x+1)\dots(x+p+1)}$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient pour tout $x > 0$,

$$(b_p x + c_p)(x + p + 1) = a_{p+1}x^2 + b_{p+1}x + c_{p+1}$$

$$\text{et } (b_p - a_{p+1})x^2 + (c_p + (p+1)b_p - b_{p+1})x + (c_p(p+1) - c_{p+1}) = 0$$

La dernière égalité devant être vérifiée pour une infinité de réels x strictement positifs, on en déduit que le polynôme est nul, d'où la relation entre les différents termes des suites donnée précédemment.

En ce qui concerne l'expression des éléments des suites $(a_p)_{p \geq 2}$, $(b_p)_{p \geq 2}$ et $(c_p)_{p \geq 2}$, même si cela n'est pas explicitement demandé dans l'énoncé de la question, on remarque que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(c_p)_{p \geq 2}$ permet d'en identifier les termes. Comme $c_2 = 2$ et $c_{p+1} = (p+1)c_p$, on a $c_p = p!$ pour tout $p \geq 2$.

II.A.3 Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{P}(p) : \quad b_p \geq c_p \geq 0$$

est vraie pour tout $p \geq 2$.

- $\mathcal{P}(2)$ est vraie car $b_2 = 3$ et $c_2 = 2$, d'où $b_2 \geq c_2 \geq 0$.
- $\mathcal{P}(p) \implies \mathcal{P}(p+1)$: soit $p \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Alors, $c_p \geq 0$ et comme $c_{p+1} = c_p(p+1)$, on a immédiatement $c_{p+1} \geq 0$. De plus,

$$b_{p+1} - c_{p+1} = (p+1)b_p - pc_p = p(b_p - c_p) + b_p$$

Or, par hypothèse de récurrence, $b_p - c_p \geq 0$ et $b_p \geq 0$, d'où, $b_{p+1} - c_{p+1} \geq 0$ et la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

- Conclusion :

$$\forall p \geq 2 \quad b_p \geq c_p \geq 0$$

II.A.4 On a déjà

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 3 \quad \text{et} \quad c_2 = 2$$

Calculons ensuite (a_3, b_3, c_3) et (a_4, b_4, c_4) à partir des formules de récurrence de la question II.A.2. Il vient

$$\begin{aligned} a_3 &= 3 \\ b_3 &= 2 + 3 \times 3 = 11 \\ c_3 &= 3 \times 2 = 6 \end{aligned}$$

d'où,

$$a_3 = 3, \quad b_3 = 11 \quad \text{et} \quad c_3 = 6$$

Puis,

$$\begin{aligned} a_4 &= 11 \\ b_4 &= 6 + 4 \times 11 = 50 \\ c_4 &= 4 \times 6 = 24 \end{aligned}$$

et donc,

$$a_4 = 11, \quad b_4 = 50 \quad \text{et} \quad c_4 = 24$$

II.B.1 La question I.B a permis de donner des majorants du reste

$$R(N, 3) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

de la série convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$. Si $N \geq 1$, on a établi

$$R(N, 3) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{N^2}$$

Si $N \geq 1$,

$$\frac{1}{2N^2} \leq \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \leq N$$

Avec la valeur d' ε donnée par l'énoncé, le réel $1/\sqrt{2\varepsilon}$ est un entier que l'on note N_0 . D'après les inégalités précédentes, on a $1/2N_0^2 \leq \varepsilon$. De plus, $R(N_0, 3) \leq 1/2N_0^2$. On conclut ainsi que

$$\text{Pour } N_0 = \lfloor 1/\sqrt{2\varepsilon} \rfloor = 1/\sqrt{2\varepsilon} = 100, \quad \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leq \varepsilon.$$

II.B.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, comme $b_4 \geq c_4 \geq 0$, d'après la question II.A.3, $c_4 \leq c_4 n$ et $b_4 n + c_4 \geq 0$. On obtient ensuite les inégalités suivantes

$$0 \leq \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)} \leq \frac{(b_4 + c_4)n}{n^7}$$

d'où,

$$0 \leq \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)} \leq \frac{74}{n^6}$$

car $b_4 = 50$ et $c_4 = 24$ d'après la question II.A.4.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6}$ est convergente. D'après le théorème de comparaison pour les séries positives, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)}$ converge également.

Comparons alors les restes des deux séries convergentes.

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)} \leq 74 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$$

Utilisons la majoration du reste $R(N, 6)$ obtenue à la question I.B. pour trouver

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)} \leq \frac{74}{5N^5}$$

La question II.A.1 a permis d'établir l'existence des suites d'entiers naturels

$$(a_p)_{p \geq 2}, (b_p)_{p \geq 2}, (c_p)_{p \geq 2}$$

telles que pour tout $p \geq 2$ et pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^p \frac{a_k}{x(x+1) \dots (x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1) \dots (x+p)}$$

Appliquons cette égalité à $p = 4$ avec $x = n \in \mathbb{N}^*$. Considérons ensuite $N \in \mathbb{N}^*$ et sommions cette égalité pour $1 \leq n \leq N$. On obtient ainsi

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=2}^4 \frac{a_k}{n(n+1) \dots (n+k)} \right) + \sum_{n=1}^N \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)}$$

Intervertissons les deux signes sommes dans l'expression du milieu, puisqu'il s'agit de sommes finies. On en déduit

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} = \sum_{k=2}^4 a_k \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} + \sum_{n=1}^N \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)}$$

En reprenant les notations de la première partie, on reconnaît les termes $u(n, p)$ et l'égalité se réécrit sous la forme

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} = \sum_{k=2}^4 a_k \sum_{n=1}^N u(n, k) + \sum_{n=1}^N \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)}$$

Toutes les séries intervenant dans l'égalité sont convergentes et d'après la sous-partie I.A, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u(n, k) = \sigma(k) = \frac{1}{k!k}$$

Finalement, en passant à la limite dans l'expression précédente, il vient

$$\zeta(3) = \sum_{k=2}^4 \frac{a_k}{k!k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)}$$

L'expression $\sum_{k=2}^4 \frac{a_k}{k!k}$ étant connue avec la question II.A.4, calculer une valeur décimale approchée de $\zeta(3)$ avec une erreur inférieure ou égale à ε revient à calculer une valeur décimale approchée de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)}$ avec la même erreur. Or, d'après la première partie de cette question, le reste de cette dernière somme est majoré par l'expression

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)} \leq \frac{74}{5N^5}$$

et si $N \geq 1$,

$$\frac{74}{5N^5} \leq \varepsilon \iff \sqrt[5]{\frac{74}{5\varepsilon}} \leq N$$

Si on pose $N_1 = \left\lceil \sqrt[5]{74/5\varepsilon} \right\rceil + 1$, alors $N_1 = 13$ et $N_1 < N_0$. En outre,

$$\sum_{n=N_1+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)} \leq \frac{74}{5N_1^5} \leq \varepsilon$$

Le calcul au rang $N = N_1 = 13$ de l'expression

$$\sum_{k=2}^4 \frac{a_k}{k!k} + \sum_{n=1}^N \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)}$$

donne une valeur approchée de $\zeta(3)$ à ε près.

On constate donc l'accélération de la convergence pour le calcul d'une valeur approchée de $\zeta(3)$ à ε près : on passe du calcul de 100 termes de la série de Riemann correspondante (à la question II.B.1) au calcul de seulement 13 termes de la série utilisée avec cette nouvelle méthode.

II.B.3 En faisant la différence entre $\zeta(3)$ et l'expression ci-dessus, on obtient le reste

$$\sum_{n=14}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)}$$

qui est positif. L'approximation de $\zeta(3)$ par

$$\sum_{k=2}^4 \frac{a_k}{k k!} + \sum_{n=1}^{13} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)}$$

est donc une approximation par défaut à ε près. Il reste à l'évaluer numériquement à l'aide de la calculatrice. On obtient

$$\frac{1}{2 \times 2!} + \frac{3}{3 \times 3!} + \frac{11}{4 \times 4!} + \sum_{n=1}^{13} \frac{50n + 24}{n^3(n+1) \dots (n+4)} \approx 1,20204$$

Une valeur décimale approchée à ε près (par défaut) de $\zeta(3)$ est 1,20204.

Ce sujet permet ainsi de calculer une valeur approchée de $\zeta(3)$. La fonction ζ a fait et fait toujours l'objet de très nombreuses recherches. Depuis Euler, on connaît la valeur de la fonction ζ pour les entiers positifs pairs, donnée par la formule

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$$

où k est un entier positif et B_{2k} sont les nombres de Bernoulli. Pour rappel, les nombres de Bernoulli se calculent à l'aide de la formule de récurrence suivante

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

avec la condition initiale $B_0 = 1$. Pour les entiers impairs, le cas n'est pas si simple et aucune formule ne donne les valeurs de $\zeta(2k+1)$. Il est donc intéressant d'en obtenir un résultat approché.

Ce n'est qu'en 1979 que Roger Apéry, un mathématicien français, a démontré l'irrationalité de $\zeta(3)$. Il est conjecturé que toutes les valeurs aux entiers impairs de la fonction ζ sont irrationnelles et même transcendentes, mais ce résultat n'a pas encore été prouvé. En comparaison, on sait depuis le XIX^e siècle, grâce respectivement à Hermite et Lindemann, que les nombres e et π sont transcendants.