

Mines Maths 1 PC 2017 — Corrigé

II. CONVERGENCE DANS $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.6 Comme $x \in \text{Ker}(u - I_E)$, $u(x) - x = 0$ et donc $u(x) = x$. Par une récurrence immédiate, il vient alors que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$u^\ell(x) = x \quad (1)$$

Calculons alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad r_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell(x) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} x = \frac{1}{k} (kx) = x$$

ce qui entraîne donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x = x$$

| Il n'est ici pas nécessaire de détailler la récurrence, dont l'intérêt est limité.

II.7 Comme $x \in \text{Im}(u - I_E)$, il existe $y \in E$ tel que $u(y) - y = x$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} r_k(x) &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell(x) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell(u(y) - y) \\ r_k(x) &= \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} u^{\ell+1}(y) - \sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell(y) \right) \quad \text{par linéarité de } u^\ell \end{aligned}$$

Ainsi, en réindexant,

$$r_k(x) = \frac{1}{k} \left(\sum_{\ell=1}^k u^\ell(y) - \sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell(y) \right) = \frac{1}{k} (u^k(y) - y) \quad (\text{somme télescopique})$$

De ce fait,
$$\|r_k(x)\| = \left\| \frac{1}{k} (u^k(y) - y) \right\| = \frac{1}{k} \|u^k(y) - y\|$$

d'où, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\|r_k(x)\| = \frac{1}{k} \|u^k(y) - y\| \leq \frac{1}{k} (\|u^k(y)\| + \|y\|)$$

En outre, comme par hypothèse $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout vecteur x , une récurrence immédiate donne

$$\|u^k(y)\| \leq \|y\|$$

Finalement,
$$\|r_k(x)\| \leq \frac{1}{k} (\|u^k(y)\| + \|y\|) \leq \frac{2}{k} \|y\|$$

et comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} 2\|y\|/k = 0$, il vient par encadrement

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|r_k(x)\| = 0$$

d'où l'on conclut

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0$$

II.8 Montrons tout d'abord que $\text{Ker}(u - I_E) \cap \text{Im}(u - I_E) = 0_E$. Pour cela, soit $x \in \text{Ker}(u - I_E) \cap \text{Im}(u - I_E)$. Alors, en utilisant les résultats des questions II.6 et II.7, il vient, par unicité de la limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = x = 0_E \quad \text{et donc} \quad x = 0_E$$

Appliquons maintenant le théorème du rang à l'endomorphisme $u - I_E$: comme l'espace E est de dimension finie, alors

$$\dim \text{Ker}(u - I_E) + \dim \text{Im}(u - I_E) = \dim E$$

De plus,

- $\text{Ker}(u - I_E) + \text{Im}(u - I_E) \subset E$
- $\dim \text{Ker}(u - I_E) + \dim \text{Im}(u - I_E) = \dim(\text{Ker}(u - I_E) + \text{Im}(u - I_E))$

Ainsi, $\text{Ker}(u - I_E)$ et $\text{Im}(u - I_E)$ sont supplémentaires dans E , ce qui s'écrit encore

$$\text{Ker}(u - I_E) \oplus \text{Im}(u - I_E) = E$$

II.9 Soit $x \in E$. Comme $\text{Ker}(u - I_E) \oplus \text{Im}(u - I_E) = E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(u - I_E) \times \text{Im}(u - I_E)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Puisque $x_1 \in \text{Ker}(u - I_E)$, alors d'après la question II.6, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $u^\ell(x_1) = x_1$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Il vient

$$r_k(x_1) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell(x_1) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} x_1 = x_1$$

et ainsi $r_k(x) = r_k(x_1 + x_2) = r_k(x_1) + r_k(x_2) = x_1 + r_k(x_2)$

On obtient alors en passant à la limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_1 + r_k(x_2) = x_1 + \lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x_2) = x_1$$

par la question II.7. Ainsi, la suite $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $p(x) = x_1$. p est alors l'application qui à x associe sa composante sur $\text{Ker}(u - I_E)$ dans la décomposition de E en somme directe citée en II.8, autrement dit

$$\text{L'application } p : E \mapsto E \text{ est la projection sur } \text{Ker}(u - I_E) \text{ parallèlement à } \text{Im}(u - I_E).$$

II.10 Soit u l'endomorphisme de E canoniquement associé à A . Avec les notations données dans l'énoncé, R_k est alors la matrice de l'endomorphisme r_k dans la base canonique de E . Comme par hypothèse il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leq \|X\|$, alors $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x dans E , et il a été prouvé à la question II.9 que $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k = p$, où p est la projection sur $\text{Ker}(u - I_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - I_E)$. Comme l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans une base est continue car linéaire en dimension finie, R_k converge vers P , où P est la matrice de p dans la base canonique de E , et comme $p^2 = p$ car p est un projecteur, alors $P^2 = P$. Ainsi,

$$\text{La suite de matrices } (R_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vers une matrice } P \text{ vérifiant l'égalité } P^2 = P.$$

Le jonglage entre matrices et endomorphismes est omniprésent dans ce sujet, et un effort de synthèse dans la rédaction a de grandes chances de se voir apprécié du correcteur.

III. MATRICES STOCHASTIQUES

III.11 En notant $(u_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ les coefficients de la matrice U , la relation matricielle $AU = U$ s'écrit encore

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} u_j = u_i$$

soit
$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

qui n'est autre que la condition (4). Finalement,

La condition $AU = U$ équivaut bien à la condition (4).

Une matrice dont la somme des lignes vaut 1 admet toujours 1 comme valeur propre et le vecteur-colonne ne contenant que des 1 est alors un vecteur propre associé.

III.12 Soient M et N deux matrices stochastiques. Il suffit de montrer que MN est stochastique, c'est-à-dire que MN vérifie les conditions (3) et (4). Comme les coefficients du produit de deux matrices à coefficients positifs sont positifs, MN vérifie la condition (3). De plus, puisque M et N sont stochastiques,

$$(MN)U = M(NU) = MU = U$$

ce qui prouve, en utilisant la question III.11, que la matrice MN vérifie la condition (4). Ainsi, MN est stochastique, et l'on a démontré que

L'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par le produit matriciel.

Si l'on n'a pas remarqué qu'il était simple de prouver la condition (4), on peut décider de montrer directement que la somme des coefficients de chaque ligne de MN vaut 1. C'est possible à condition de ne pas se perdre dans les sommes doubles qui apparaissent alors, et... c'est probablement un bon exercice !

III.13 Montrons que l'ensemble $\mathcal{E}$ est convexe. Soient M et N dans $\mathcal{E}$, $t \in [0, 1]$, et montrons que $tM + (1-t)N \in \mathcal{E}$, c'est-à-dire que $tM + (1-t)N$ vérifie les conditions (3) et (4). Comme t est positif, les coefficients de tM et de $(1-t)N$ le sont également, et ainsi la matrice $tM + (1-t)N$ vérifie la condition (3). De plus, comme M et N vérifient la condition (4), il vient

$$(tM + (1-t)N)U = tMU + (1-t)NU = tU + (1-t)U = U$$

donc la matrice $tM + (1-t)N$ vérifie la condition (4) d'après la question III.11. Par suite, $tM + (1-t)N \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est convexe.

Montrons maintenant que l'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé : soit (C_n) une suite de matrices de $\mathcal{E}$ qui converge vers une matrice C . Il suffit de montrer que $C \in \mathcal{E}$. Comme les coefficients de C sont les limites des coefficients des matrices C_n et que ces derniers sont positifs, alors les coefficients de C sont eux-mêmes positifs et C vérifie la condition (3). De surcroît, par continuité de la multiplication à droite par U dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$CU = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n \right) U = \lim_{n \rightarrow +\infty} (C_n U) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U = U$$

ce qui prouve que C vérifie la condition (4) d'après la question III.11. Ainsi, C est une matrice stochastique, en conséquence de quoi l'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est une partie convexe fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une autre méthode pour montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé serait de prouver que c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. Il suffit pour cela de considérer pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ les applications coordonnées $f_{i,j}$ définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_{i,j}(M) = m_{i,j}$, et pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ les applications g_i , également définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $g_i(M) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}$.

Ces applications sont continues car linéaires en dimension finie, et les ensembles $f_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}^+)$ et $g_i^{-1}(\{1\})$ sont fermés comme images réciproques de fermés par des applications continues. Comme

$$\mathcal{E} = \bigcap_{i,j \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} f_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap g_i^{-1}(\{1\})$$

l'ensemble $\mathcal{E}$ est donc fermé comme intersection de fermés.

III.14 Soient $A \in \mathcal{E}$ et $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Notons $(AX)_i$ le i^{e} coefficient du vecteur colonne AX . Alors, comme A est stochastique,

$$\begin{aligned} |(AX)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| && \text{(condition 3)} \\ &\leq \|X\|_{\infty} \sum_{j=1}^n a_{i,j} \\ |(AX)_i| &\leq \|X\|_{\infty} && \text{(condition 4)} \end{aligned}$$

En passant au maximum sur i , il vient

$$\max_{1 \leq i \leq n} |(AX)_i| \leq \|X\|_{\infty}$$

et en définitive $\forall A \in \mathcal{E} \quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|AX\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty}$.

III.15 Montrons que $\dim \text{Ker}(A^p - I_n) = 1$. Soient comme il est suggéré dans l'indication un vecteur $X = {}^t(x_1 \dots x_n) \in \text{Ker}(A^p - I_n)$ et un indice $s \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$. Comme la matrice A^p est le produit de matrices stochastiques, elle est stochastique d'après la question III.12. Supposons par l'absurde qu'il existe un indice i_0 tel que $x_{i_0} < x_s$, et notons $d_{i,j}$ les coefficients de A^p . Puisque $A^p X = X$, il s'ensuit que

$$x_s = \sum_{j=1}^n d_{s,j} x_j \leq x_s \sum_{j=1}^n d_{s,j} = x_s$$

d'après la condition (4). Or, comme $x_{i_0} < x_s$ et que les $d_{i,j}$ sont strictement positifs, $d_{s,i_0} x_{i_0} < d_{s,i_0} x_s$ et donc l'inégalité précédente est stricte, c'est-à-dire

$$x_s < x_s$$

ce qui est absurde. Ainsi, il n'existe pas d'indice i_0 tel que $x_{i_0} < x_s$, et donc tous les x_j sont égaux :

$$\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket \quad x_j = x_s$$

On en déduit que $X = x_s U$ puis $\text{Ker} (A^p - I_n) \subset \text{Vect } U$. Comme A^p est stochastique, on a réciproquement $\text{Vect } U \subset \text{Ker} (A^p - I_n)$, d'où

$$\text{Ker} (A^p - I_n) = \text{Vect } U$$

Finalement,

$$\dim \text{Ker} (A^p - I_n) = 1$$

III.16 Soit $X \in \text{Ker} (A - I_n)$. Alors $AX = X$, et par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n X = X$. En particulier, $A^p X = X$, soit $X \in \text{Ker} (A^p - I_n)$. Par suite,

$$\text{Ker} (A - I_n) \subset \text{Ker} (A^p - I_n) = \text{Vect } U$$

Réciproquement, soit $X \in \text{Vect } U$, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que $X = \lambda U$. Alors

$$(A - I_n)X = (A - I_n)\lambda U = \lambda(AU - U) = \lambda(U - U) = 0$$

car A est stochastique. Ainsi,

$$\text{Vect } U \subset \text{Ker} (A - I_n)$$

En conclusion,

$$\text{Ker} (A - I_n) = \text{Vect } U$$

III.17 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la matrice A^ℓ est stochastique et ses coefficients sont donc positifs. Comme

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$$

les coefficients de R_k sont aussi positifs, et la matrice R_k vérifie la condition (3). De plus, comme pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $A^\ell X = X$, il vient

$$R_k U = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell U = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} U = U$$

donc la matrice R_k vérifie la condition (4). En conclusion,

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ la matrice } R_k \text{ est stochastique.}$$

III.18 On a démontré à la question II.10 que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leq \|X\|$, alors la matrice R_k converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P telle que $P^2 = P$. La question III.14 prouve que c'est le cas ici, en posant $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. La suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers une matrice P telle que $P^2 = P$.

De plus, on a prouvé à la question III.17 que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k \in \mathcal{E}$. Puisque $\mathcal{E}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après la question III.13, $P \in \mathcal{E}$ et P est stochastique. De plus, P est la matrice du projecteur sur $\text{Ker} (A - I_n)$ (parallèlement à $\text{Im} (A - I_n)$) qui est de dimension 1 d'après la question III.16, donc le rang de P est égal à 1. Ainsi,

$$\text{La suite } (R_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers une matrice } P \text{ stochastique de rang 1.}$$

III.19 Comme P est stochastique,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1$$

Chacune de ses lignes comporte au moins un coefficient non nul. Notons, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P_k = (p_{k,1} \quad \dots \quad p_{k,n})$ la k^{e} ligne de P . Puisque P est de rang 1,

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \exists \mu_k \in \mathbb{R} \quad P_k = \mu_k P_1$$

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a

$$1 = \sum_{j=1}^n p_{i,j} = \sum_{j=1}^n \mu_i p_{1,j} = \mu_i \sum_{j=1}^n p_{1,j} = \mu_i$$

Ainsi, toutes les lignes de P sont identiques. En posant

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lambda_i = p_{1,i}$$

il vient
$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n)$$

En outre, la matrice notée $L = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n)$ est une matrice-ligne stochastique car P est stochastique et

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = \sum_{j=1}^n p_{1,j} = 1$$

Par suite, Il existe une matrice-ligne stochastique L telle que $P = UL$.

III.20 Puisque $P = \lim_{k \rightarrow +\infty} R_k$, calculons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} R_k A &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{\ell+1} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^k A^{\ell} \\ &= \frac{1}{k+1} \frac{k+1}{k} \left(\sum_{\ell=0}^k A^{\ell} - A^0 \right) && \text{et donc} \\ R_k A &= \frac{k+1}{k} R_{k+1} - \frac{I_n}{k} \end{aligned}$$

En passant à la limite dans l'égalité précédente, il vient

$$PA = P$$

De surcroît, d'après la question III.19, $P=UL$. Ainsi,

$$ULA = UL$$

puis, en multipliant à gauche par tU et en divisant par n ,

$$LA = L$$

Montrons maintenant l'unicité. En transposant l'égalité ci-dessus, il vient

$${}^tL \in \text{Ker} ({}^tA - I_n)$$

De plus, comme une matrice et sa transposée ont même rang,

$$\text{rg} (A - I_n) = \text{rg} ({}^t(A - I_n)) = \text{rg} ({}^tA - I_n)$$

d'où, d'après le théorème du rang et la question III.16,

$$1 = \dim \operatorname{Ker} (A - I_n) = \dim \operatorname{Ker} ({}^t A - I_n)$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une autre matrice-ligne stochastique L_1 , non égale à L , telle que $L_1 A = L_1$. Alors ${}^t A {}^t L_1 = {}^t L_1$ et

$${}^t L_1 \in \operatorname{Ker} ({}^t A - I_n)$$

Ainsi, L_1 et L sont dans le même sous-espace propre de dimension 1 et il existe $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $L_1 = \theta L$. Mais comme L et L_1 sont des matrices-lignes stochastiques, la somme de leurs coefficients vaut 1, ce qui implique nécessairement $\theta = 1$ et donc

$$L_1 = L$$

Par conséquent,

La matrice L est la seule matrice-ligne stochastique telle que $LA = L$.

III.21 Comme L est une matrice-ligne stochastique, ses coefficients sont tous positifs ou nuls. Reste à montrer qu'aucun n'est nul. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un indice $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\lambda_r = 0$. Puisque $LA = L$, une récurrence immédiate donne $LA^p = L$. En s'intéressant au coefficient d'indice r de ces deux matrices-lignes, il vient

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i d_{i,r} = 0$$

Or par hypothèse, les coefficients $d_{i,j}$ de la matrice A^p sont tous strictement positifs, ainsi l'égalité précédente implique

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lambda_i = 0$$

et donc $L = 0_n$, ce qui est absurde. Par suite, aucun coefficient de L n'est nul, et en conclusion

Les coefficients de la matrice-ligne L sont tous strictement positifs.

III.22 Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A . On déduit de la question III.14 que l'hypothèse faite sur u en partie II est vérifiée. De surcroît, d'après la question II.8,

$$\operatorname{Ker} (u - I_E) \oplus \operatorname{Im} (u - I_E) = E$$

Notons u_K et u_I les endomorphismes induits par u sur les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} (u - I_E)$ et $\operatorname{Im} (u - I_E)$, et χ_u , χ_{u_K} et χ_{u_I} les polynômes caractéristiques respectivement de u , u_K et u_I . Comme $\operatorname{Ker} (u - I_E)$ et $\operatorname{Im} (u - I_E)$ sont deux sous-espaces vectoriels stables par u et qu'ils sont supplémentaires dans E , il vient

$$\chi_u = \chi_{u_K} \chi_{u_I}$$

D'après la question III.16, $\dim \operatorname{Ker} (u - I_E) = \dim \operatorname{Ker} (A - I_n) = 1$. De plus, comme $\operatorname{Ker} (A - I_n) = \operatorname{Vect} U$, u_K est l'identité sur $\operatorname{Ker} (u - I_E)$, et donc $\chi_{u_K} = X - 1$. Enfin, comme la somme est directe, 1 n'est pas racine de χ_{u_I} et ainsi

Le réel 1 est valeur propre simple de la matrice A .