

#### IV. THÉORÈME DE PERRON-FROBENIUS POUR UNE CLASSE DE MATRICES SYMÉTRIQUES POSITIVES

**21** La matrice  $A$  est symétrique réelle. D'après le théorème spectral,

La matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

**22** La matrice  $A$  est diagonalisable, donc son spectre est non vide et son rayon spectral est bien défini. Par ailleurs,  $\rho(A) \geq 0$  par définition de  $\rho$ . Supposons que  $\rho(A) = 0$ . Par définition de  $\rho$ , toutes les valeurs propres de  $A$  sont nulles et  $A$  est semblable à  $\text{diag}(0, \dots, 0) = 0$ , donc  $A$  est nulle, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ainsi,

$$\rho(A) > 0$$

Pour tout corps  $K$ , pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  trigonalisable,  $\rho(A) = 0$  si, et seulement si,  $A$  est nilpotente. En effet,  $\rho(A) = 0$  si, et seulement si, on obtient en trigonalisant  $A$  une matrice triangulaire n'ayant que des zéros sur sa diagonale.

De plus, une matrice diagonalisable et nilpotente est nulle. Ainsi, il est clair que pour une matrice  $A$  diagonalisable,  $\rho(A) = 0$  implique  $A = 0$ .

**23** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité. Posons  $(E_1, \dots, E_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres associée (elle existe d'après le théorème spectral). Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  unitaire, on peut écrire

$$X = \sum_{k=1}^n (X | E_k) E_k$$

et par linéarité de l'application  $Y \mapsto AY$  définie sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$AX = \sum_{k=1}^n (X | E_k) A E_k$$

On a donc

$$\begin{aligned} X^\top A X &= (X | A X) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n (X | E_k) E_k \mid \sum_{\ell=1}^n (X | E_\ell) A E_\ell \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n (X | E_k) E_k \mid \sum_{\ell=1}^n (X | E_\ell) \lambda_\ell E_\ell \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (X | E_k) (X | E_\ell) \lambda_\ell (E_k | E_\ell) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (X | E_k) (X | E_\ell) \lambda_\ell \delta_{k\ell} \quad (\text{base orthonormée}) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (X | E_k)^2 \\ X^\top A X &\leq \mu \sum_{k=1}^n (X | E_k)^2 = \mu \|X\|^2 \end{aligned}$$

Le vecteur  $X$  étant unitaire, on a bien  $X^\top A X \leq \mu$ . Ainsi,

Pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  unitaire,  $X^\top A X \leq \mu$ .

**24** D'après le calcul effectué dans la question 23, on a égalité si, et seulement si,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k (X | E_k)^2 = \mu \sum_{k=1}^n (X | E_k)^2$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{k=1}^n (\mu - \lambda_k) (X | E_k)^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \mu}}^n (\mu - \lambda_k) (X | E_k)^2 = 0$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , par définition de  $\mu$ ,

$$(\mu - \lambda_k) (X | E_k)^2 \geq 0$$

Or, une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, tous les termes sont nuls. On a donc égalité si, et seulement si, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,

$$(\mu - \lambda_k) (X | E_k)^2 = 0$$

ou de manière équivalente, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $\lambda_k \neq \mu$ ,

$$(X | E_k) = 0$$

Finalement, on a égalité si, et seulement si,

$$X = \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k = \mu}}^n (X | E_k) E_k \in \text{Vect} \{E_k \mid \lambda_k = \mu\} = \text{Ker} (A - \mu I_n)$$

En conclusion,

Pour  $X$  unitaire,  $X^\top A X = \mu$  si, et seulement si,  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\mu$ .

**25** Soit  $X = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$  un vecteur unitaire. La matrice  $A$  est à coefficients positifs, donc d'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |X^\top A X| &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i A_{ij} X_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_i| A_{ij} |X_j| \\ |X^\top A X| &\leq |X|^\top A |X| \end{aligned}$$

Or,  $|X|$  est unitaire car

$$|X|^\top |X| = \sum_{i=1}^n |X_i|^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 = 1$$

Ainsi, la question 23 s'applique au vecteur  $|X|$  et d'après les calculs précédents,

$$\text{Pour tout } X \text{ unitaire, } |X^\top A X| \leq |X|^\top A |X| \leq \mu.$$

**26** Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre unitaire associé. Alors

$$|X^\top A X| = |\lambda X^\top X| = |\lambda| \|X\|^2 = |\lambda|$$

Or, d'après la question précédente,  $|X^\top A X| \leq \mu$ . Ainsi,

$$\forall \lambda \in \text{sp}(A) \quad |\lambda| \leq \mu$$

Ceci étant vrai pour tout  $\lambda \in \text{sp}(A)$ , c'est vrai pour une valeur propre de module maximal maximum et  $r \leq \mu$ . Or,  $\mu \in \text{sp}(A)$ . Donc  $r \geq |\mu| \geq \mu$  et

$$r = \mu$$

**27** Supposons que  $AX = rX$  pour un vecteur  $X$  unitaire. On a vu à la question 25 que si  $X$  est un vecteur unitaire, alors  $|X|$  est un vecteur unitaire. En conséquence,

$$r = |r| = |r||X|^2 = |X^\top(rX)| = |X^\top AX| \leq |X|^\top A |X| \leq \mu = r$$

d'après les questions 25 et 26. Ces inégalités sont donc des égalités et

$$|X|^\top A |X| = r$$

Ainsi, d'après le résultat montré à la question 24,

Si  $X$  est un vecteur propre unitaire de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $r$ , alors le vecteur  $|X|$  est aussi un vecteur propre unitaire de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $r$ .

Il en découle que l'on a en particulier, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,

$$(A |X|)_i = (r |X|)_i$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} |X_j| = r |X_i|$$

Le vecteur  $|X|$  est non nul, donc il existe  $1 \leq k \leq n$  vérifiant  $|X_k| > 0$ . De surcroît, la matrice  $A$  est strictement positive, si bien que

$$r |X_i| = \sum_{j=1}^n A_{ij} |X_j| \geq A_{ik} |X_k| > 0$$

On obtient finalement  $r |X_i| > 0$ . Puisque  $r > 0$ , cela revient à dire que  $|X_i| > 0$ . Ceci étant valable pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , cela montre que

$$|X| > 0$$

**28** Supposons que  $X \neq -|X|$ . De manière équivalente,  $X + |X| \neq 0$ . Posons alors

$$Y = \frac{X + |X|}{\|X + |X|\|} \neq 0$$

D'après la question 27,  $|X|$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $r$ , donc  $Y$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $r$ . De plus, le vecteur  $Y$  est unitaire. Ainsi, d'après la question 27,

$$|Y| > 0$$

Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . L'inégalité ci-dessus donne en particulier

$$X_i + |X_i| \neq 0 \quad \text{soit} \quad X_i \neq -|X_i|$$

Or,  $X_i \in \{|X_i|, -|X_i|\}$  donc  $X_i = |X_i|$ . Ceci étant vrai pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on obtient  $X = |X|$ . Ainsi,

$$X = -|X| \quad \text{ou} \quad X = |X|$$

**29** D'après la question 26,  $r$  est valeur propre de  $A$  et par conséquent,

$$\dim(\text{Ker}(A - rI_n)) \geq 1$$

Supposons par l'absurde que  $\dim(\text{Ker}(A - rI_n)) \geq 2$ , et choisissons deux vecteurs unitaires  $X, Y \in \text{Ker}(A - rI_n)$  orthogonaux. D'après la question 28,

$$X = \pm |X| \quad \text{et} \quad Y = \pm |Y|$$

or,

$$(X | Y) = 0$$

Par conséquent,

$$(|X| | |Y|) = 0$$

soit

$$\sum_{k=1}^n |X_k| |Y_k| = 0$$

Or, d'après la question 27,  $|X| > 0$  et  $|Y| > 0$  donc pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $|X_k|$  et  $|Y_k|$  sont strictement positifs. De ce fait,

$$\sum_{k=1}^n |X_k| |Y_k| > 0$$

et on aboutit à une contradiction. On a ainsi montré que

$$\dim(\text{Ker}(A - rI_n)) = 1$$

**30** La matrice  $A$  étant diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre  $r$  est la dimension du sous-espace propre associé. Ainsi,

$$\text{La valeur propre } r \text{ est de multiplicité } 1.$$

Par l'absurde, supposons que  $-r$  soit valeur propre de la matrice  $A$ . D'après la question 22,  $r > 0$ , donc  $r \neq -r$ . Ainsi, soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre  $-r$ . D'après la question 25, on a

$$r = |-r||X|^2 = |X^\top(-rX)| = |X^\top AX| \leq |X|^\top A |X| \leq r$$

Remarquons que le terme à gauche et le terme à droite sont les mêmes. Cette inégalité est donc une égalité, et on déduit grâce à la question 24 que  $|X|$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $r$ .

Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on obtient

$$-rX_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}X_j \quad \text{et} \quad r|X_i| = \sum_{j=1}^n A_{ij}|X_j|$$

En passant à la valeur absolue, on obtient par positivité de la matrice  $A$

$$\left| \sum_{j=1}^n A_{ij}X_j \right| = \sum_{j=1}^n A_{ij}|X_j| = \sum_{j=1}^n |A_{ij}X_j|$$

D'après la question 4, ceci implique l'existence d'un  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$A_{ij}X_j = e^{i\theta} |A_{ij}X_j| = e^{i\theta} A_{ij} |X_j|$$

La matrice  $A$  étant strictement positive,  $A_{ij} \neq 0$  donc

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad X_j = e^{i\theta} |X_j|$$

de sorte que

$$X = e^{i\theta} |X|$$

Or, le vecteur  $X$  est réel donc  $X = \pm |X| \in \text{Ker}(A - rI_n)$ . Ceci contredit le fait que  $X$  est un vecteur propre associé à  $-r$ , donc  $-r$  n'est pas valeur propre de  $A$ . Or, la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  donc toutes ses valeurs propres sont réelles, et  $r$  est l'unique valeur propre de  $A$  de module maximal. En conclusion,

$$\text{Si } A \text{ est une matrice symétrique et strictement positive, alors } \rho(A) \text{ est sa seule valeur propre de module maximal.}$$

**31** Plaçons-nous dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , et posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  est positive et son polynôme caractéristique  $\chi_A$  vaut

$$\chi_A = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$$

Le théorème de Cayley-Hamilton assure que la matrice  $A$  est annulée par  $\chi_A$  qui est un polynôme scindé à racines simples. La matrice  $A$  est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont  $-1$  et  $+1$  : la matrice  $A$  a ainsi deux valeurs propres de module maximal. Par conséquent,

Le théorème de Perron-Frobenius ne s'applique plus pour les matrices seulement supposées positives.

**32** D'après la question 15,  $\rho(A^p) = r^p$ . Appliquons les résultats de la partie précédente à la matrice symétrique et strictement positive  $A^p$ . D'après la question 29,

$$\dim(\text{Ker}(A^p - r^p I_n)) = 1$$

et d'après la question 27,  $\text{Ker}(A^p - r^p I_n)$  est engendré par un vecteur strictement positif. Si  $X \in \text{Ker}(A - r I_n)$ , on a  $AX = rX$  si bien que

$$A^p X = r^p X$$

donc

$$\text{Ker}(A - r I_n) \subset \text{Ker}(A^p - r^p I_n)$$

et

$$\dim(\text{Ker}(A - r I_n)) \leq \dim(\text{Ker}(A^p - r^p I_n))$$

De plus, puisque  $r$  est une valeur propre de  $A$ ,

$$\dim(\text{Ker}(A - r I_n)) \geq 1 = \dim(\text{Ker}(A^p - r^p I_n))$$

De ce fait,

$$\dim(\text{Ker}(A - r I_n)) = \dim(\text{Ker}(A^p - r^p I_n))$$

or,

$$\text{Ker}(A - r I_n) \subset \text{Ker}(A^p - r^p I_n)$$

Finalement, par égalité des dimensions,  $\text{Ker}(A - r I_n) = \text{Ker}(A^p - r^p I_n)$  et

Le sous-espace propre  $\text{Ker}(A - r I_n)$  est de dimension 1 et est engendré par un vecteur strictement positif.

**33** On a montré en question 32 que  $r$  était une valeur propre de  $A$ . Montrons que c'est l'unique valeur propre de  $A$  de module  $r$ . La matrice  $A$  étant symétrique réelle, elle est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et  $\text{sp}(A) \subset \mathbb{R}$ . Ainsi, pour montrer que  $r$  est l'unique valeur propre de  $A$  de module  $r$ , il suffit de montrer que  $-r$  n'est pas une valeur propre de  $A$ .

Dans un premier temps, remarquons que si  $\lambda \in \text{sp}(A)$ , alors pour tout vecteur propre  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , on a

$$AX = \lambda X$$

d'où

$$A^p X = \lambda^p X$$

si bien que  $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \subset \text{Ker}(A^p - \lambda^p I_n)$ .

Distinguons les cas selon la parité de  $p$ .

- Si  $p$  est impair, on obtient de même

$$\text{Ker}(A + r I_n) = \text{Ker}(A - (-r) I_n) \subset \text{Ker}(A^p - (-r)^p I_n) = \text{Ker}(A^p + r^p I_n)$$

Or,  $A^p$  est symétrique strictement positive. On peut donc appliquer le résultat de la question 30. Ainsi,  $-r^p$  n'est pas une valeur propre de  $A^p$  et

$$\text{Ker}(A^p + r^p I_n) = \{0\}$$

donc

$$\text{Ker}(A + r I_n) \subset \{0\}$$

soit

$$\text{Ker}(A + r I_n) = \{0\}$$

et  $-r$  n'est pas valeur propre de  $A$ .

- Si  $p$  est pair, on a

$$\operatorname{Ker}(A + rI_n) = \operatorname{Ker}(A - (-r)I_n) \subset \operatorname{Ker}(A^p - (-r)^p I_n) = \operatorname{Ker}(A^p - r^p I_n)$$

$$\text{De même,} \quad \operatorname{Ker}(A - rI_n) \subset \operatorname{Ker}(A^p - r^p I_n)$$

$$\text{Ainsi,} \quad \operatorname{Ker}(A - rI_n) \oplus \operatorname{Ker}(A + rI_n) \subset \operatorname{Ker}(A^p - r^p I_n)$$

En passant à la dimension dans l'inclusion ci-dessus, on obtient :

$$\dim(\operatorname{Ker}(A - rI_n)) + \dim(\operatorname{Ker}(A + rI_n)) \leq \dim(\operatorname{Ker}(A^p - r^p I_n))$$

$$\text{soit} \quad 1 + \dim(\operatorname{Ker}(A + rI_n)) \leq 1$$

d'après la question 32. De ce fait,  $\dim(\operatorname{Ker}(A + rI_n)) = 0$  et  $-r$  n'est pas valeur propre de  $A$ .

En conclusion,

La valeur propre  $r$  est l'unique valeur propre de  $A$  de module  $r$ .