Partie I

I.1.1 Identifions les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ avec les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Puisqu'une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue, il vient que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction B est définie sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et à valeurs réelles. Elle est de plus manifestement bilinéaire, symétrique et positive. Elle l'est de même par restriction à $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

Montrons que cette restriction est définie positive sur $\mathbb{R}_n[X]$. Supposons que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $B(P, P) = 0$. Ceci s'écrit

$$\sum_{i=0}^{n} P(x_i)^2 = 0$$

Puisque pour tout $i \in [\![0 \,; n]\!]$, $P(x_i) \in \mathbb{R}$, on a $P(x_i)^2 \geqslant 0$. Or une somme de $n+1$ termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls. Ainsi,

$$\forall i \in [\![0 \,; n]\!] \qquad P(x_i)^2 = 0$$

donc

$$\forall i \in [\![0 \,; n]\!] \qquad P(x_i) = 0$$

On en déduit que le polynôme P, de degré au plus n, admet au moins $n+1$ racines distinctes. Par conséquent, $P = 0$. Ceci montre que la restriction de B à $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ est définie positive sur $\mathbb{R}_n[X]$. En conclusion,

$$\boxed{\text{B définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

Montrons que B n'est pas définie positive sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

est une fonction polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est non nulle sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale de degré $n+1$ dont les seules racines sont $x_0, \ldots, x_n$. En outre,

$$\begin{aligned} B(f, f) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0}^{n} (x_i - x_j)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n} 0 \\ B(f, f) &= 0 \end{aligned}$$

En résumé, $B(f, f) = 0$ et $f \neq 0$. Par suite, B n'est pas définie positive sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En particulier,

$$\boxed{\text{B ne définit pas un produit scalaire sur } C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$$

I.1.2 Introduisons le symbole de Kronecker défini pour $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ par

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(j,k) \in [\![0\,;n]\!]^2$. Calculons

$$\mathrm{L}_k(x_j) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x_j - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Si $j \neq k$, alors l'un des termes du produit est $(x_j - x_j)/(x_k - x_j) = 0$. Par conséquent, dans ce cas, $\mathrm{L}_k(x_j) = 0$. Si $j = k$, alors les n termes du produit sont égaux à 1 et $\mathrm{L}_k(x_j) = 1$. En résumé,

$$\boxed{\forall (j,k) \in [\![0\,;n]\!]^2 \qquad \mathrm{L}_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, L_k est un polynôme à coefficients réels de degré égal à n, donc $\mathrm{L}_k \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Soit $(j,k) \in [\![0\,;n]\!]^2$. Écrivons, à l'aide du calcul précédent,

$$\mathrm{B}(\mathrm{L}_j, \mathrm{L}_k) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_j(x_i)\mathrm{L}_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \delta_{i,j}\delta_{i,k}$$

Si $k \neq j$, tous les termes de la somme ci-dessus sont nuls. Si $k = j$, alors

$$\mathrm{B}(\mathrm{L}_j, \mathrm{L}_j) = \sum_{i=0}^{n} {\delta_{i,j}}^2$$

et le seul terme non nul dans cette somme est ${\delta_{j,j}}^2 = 1^2 = 1$. Par conséquent,

$$\forall (j,k) \in [\![0\,;n]\!]^2 \qquad \mathrm{B}(\mathrm{L}_j, \mathrm{L}_k) = \delta_{j,k}$$

On en déduit que la famille $(\mathrm{L}_k)_{k\in[\![0\,;n]\!]}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Puisqu'elle comporte $n+1$ vecteurs et que $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est de dimension $n+1$, il vient que

$$\boxed{(\mathrm{L}_k)_{k\in[\![0\,;n]\!]} \text{ est une base orthonormée de } (\mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \mathrm{B}).}$$

I.2.1 Soit $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $k \in [\![0\,;n]\!]$. Calculons, à l'aide de la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(f, \mathrm{L}_k) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_k(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{k,i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{B}(f, \mathrm{L}_k) = f(x_k)}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n(f)(x_k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{B}(f, \mathrm{L}_i)\mathrm{L}_i(x_k) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{B}(f, \mathrm{L}_i)\delta_{i,k} && \text{d'après I.1.2} \\ &= \mathrm{B}(f, \mathrm{L}_k) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}_n(f)(x_k) = f(x_k)} \qquad \text{d'après le début de la question}$$

I.2.2 Considérons la fonction

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ \quad \mathrm{P} \quad \longmapsto (\mathrm{P}(x_0),\ldots,\mathrm{P}(x_n)) \end{cases}$$

L'application φ est linéaire. Déterminons son noyau. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Le fait que $\varphi(\mathrm{P}) = 0$ implique que pour tout $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, $\mathrm{P}(x_i) = 0$. Puisque les x_i sont deux à deux distincts pour $i = 0,\ldots,n$, le polynôme $(\mathrm{X}-x_0)\times\cdots\times(\mathrm{X}-x_n)$ divise P, qui est de degré au plus n. Par conséquent, $\mathrm{P} = 0$ puis

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$$

donc φ est injective. Comme $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont de même dimension finie $n+1$, il vient que φ est bijective. En particulier, $(f(x_0),\ldots,f(x_n))$ admet un unique antécédent par φ, c'est-à-dire qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que, pour tout $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, $\mathrm{P}(x_k) = f(x_k)$. Or, par construction, le polynôme $\mathrm{P}_n(f)$ est combinaison linéaire des $(\mathrm{L}_j)_{j\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]}$, donc $\mathrm{P}_n(f) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. En outre, d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$,

$$\mathrm{P}_n(f)(x_k) = f(x_k)$$

On en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{P}_n(f) \text{ est l'unique polynôme P de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ vérifiant} \\ \mathrm{P}(f)(x_k) = f(x_k) \text{ pour tout } k \in [\![\,0\,;n\,]\!].\end{array}}$$

Les polynômes L_k $(k \in [\![\,0\,;n\,]\!])$ sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange aux points $x_0,\ldots,x_n$.

On peut également montrer le résultat de cette question comme suit. D'une part, en utilisant la question précédente, on constate que $\mathrm{P}_n(f)$ est un polynôme de degré au plus n qui vérifie $\mathrm{P}_n(f)(x_k) = f(x_k)$ pour tout k. D'autre part, si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ vérifie $\mathrm{P}(x_k) = f(x_k) = \mathrm{P}_n(f)(x_k)$ pour tout k, alors le polynôme $\mathrm{P} - \mathrm{P}_n(f)$ est de degré au plus n et admet au moins $n+1$ racines distinctes : $x_0,\ldots,x_n$. Par conséquent, $\mathrm{P} - \mathrm{P}_n(f) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{P} = \mathrm{P}_n(f)$. Par suite, le polynôme $\mathrm{P}_n(f)$ est bien le seul polynôme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ qui répond à la question.

I.2.3 Soit $f \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Dans ce cas, f est un polynôme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et vérifie évidemment $f(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$. La question précédente assure alors que

$$\boxed{\mathrm{P}_n(f) = f}$$

En considérant le polynôme $f = 1 \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on obtient, d'une part, avec la question précédente,

$$\mathrm{P}_n(f)(\mathrm{X}) = f(\mathrm{X}) = 1$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n(f)(\mathrm{X}) &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{B}\,(f,\mathrm{L}_i)\,\mathrm{L}_i(\mathrm{X}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(\mathrm{X}) && \text{d'après I.2.1} \\ \mathrm{P}_n(f)(\mathrm{X}) &= \sum_{i=0}^{n} 1 \times \mathrm{L}_i(\mathrm{X}) \end{aligned}$$

Ceci implique

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_i(x) = 1}$$

I.3.1 Soit $f \in \mathrm{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Calculons, pour $x \in [\,a\,;b\,]$,

$$\begin{aligned}\Lambda(f)(x) &= \mathrm{P}_n(f)(x)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{B}(f,\mathrm{L}_i)\mathrm{L}_i(x)\\ \Lambda(f)(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(x) \qquad \text{d'après la question I.2.1}\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$|\Lambda(f)(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |f(x_i)|\,|\mathrm{L}_i(x)|$$

Or, par définition de N_∞,

$$\forall i \in [\![\,0\,;n\,]\!] \qquad |f(x_i)| \leqslant \mathrm{N}_\infty(f)$$

Par suite,

$$\begin{aligned}|\Lambda(f)(x)| &\leqslant \sum_{i=0}^{n} \mathrm{N}_\infty(f)\,|\mathrm{L}_i(x)|\\ &\leqslant \mathrm{N}_\infty(f)\sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|\\ |\Lambda(f)(x)| &\leqslant \mathrm{N}_\infty(f)\Phi(x)\end{aligned}$$

Puisque la fonction L_i est continue pour tout $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, sur $[\,a\,;b\,]$, il en est de même de la fonction $|\mathrm{L}_i|$ par composition et de la fonction Φ par sommation finie. Ainsi, $\Phi \in \mathrm{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. En outre, l'inégalité précédente implique que

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad |\Lambda(f)(x)| \leqslant \mathrm{N}_\infty(f)\mathrm{N}_\infty(\Phi)$$

Par conséquent,

$$\mathrm{N}_\infty(\Lambda(f)) \leqslant \mathrm{N}_\infty(f)\mathrm{N}_\infty(\Phi)$$

puis, pour $f \in \mathrm{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{N}_\infty(f) \leqslant 1$,

$$\mathrm{N}_\infty(\Lambda(f)) \leqslant \mathrm{N}_\infty(\Phi)$$

Ceci implique que l'endomorphisme Λ est continu et

$$\boxed{\|\Lambda\| \leqslant \mathrm{N}_\infty(\Phi)}$$

I.3.2 La fonction Φ est continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$ donc elle y est bornée et y atteint ses bornes. En particulier,

$$\exists \tau \in [\,a\,;b\,] \quad \Phi(\tau) = \mathrm{Sup}\,\{\Phi(x)\,|\,x \in [\,a\,;b\,]\}$$

Puisque $\Phi \geqslant 0$ comme somme de fonctions positives,

$$\{|\Phi(x)|\,|\,x \in [\,a\,;b\,]\} = \{\Phi(x)\,|\,x \in [\,a\,;b\,]\}$$

Ainsi,

$$\mathrm{N}_\infty(\Phi) = \mathrm{Sup}\,\{|\Phi(x)|\,|\,x \in [\,a\,;b\,]\} = \mathrm{Sup}\,\{\Phi(x)\,|\,x \in [\,a\,;b\,]\}$$

En résumé,

$$\boxed{\exists \tau \in [\,a\,;b\,] \qquad \Phi(\tau) = \mathrm{N}_\infty(\Phi)}$$

I.3.3 Calculons

$$\Lambda(\Psi)(\tau) = \mathrm{P}_n(\Psi)(\tau) = \sum_{i=0}^{n} \Psi(x_i)\mathrm{L}_i(\tau)$$

Soit $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$. Si $\mathrm{L}_i(\tau) = 0$, alors $\Psi(x_i) = \varepsilon_i = 0$ et

$$\Psi(x_i)\mathrm{L}_i(\tau) = 0 = |\mathrm{L}_i(\tau)|$$

Sinon, $\mathrm{L}_i(\tau) \neq 0$, $\Psi(x_i) = |\mathrm{L}_i(\tau)|\,/\mathrm{L}_i(\tau)$ et

$$\Psi(x_i)\mathrm{L}_i(\tau) = \frac{|\mathrm{L}_i(\tau)|}{\mathrm{L}_i(\tau)}\mathrm{L}_i(\tau) = |\mathrm{L}_i(\tau)|$$

En conséquence, pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$,

$$\Psi(x_i)\mathrm{L}_i(\tau) = |\mathrm{L}_i(\tau)|$$

Ceci implique $$\Lambda(\Psi)(\tau) = \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(\tau)| = \Phi(\tau) = \mathrm{N}_\infty(\Phi)$$

La fonction Ψ est, par construction, continue sur $[\,a\,;b\,]$ et à valeurs dans $[\,-1\,;1\,]$, donc $\mathrm{N}_\infty(\Psi) \leqslant 1$. L'inégalité précédente assure que

$$\mathrm{N}_\infty(\Lambda(\Psi))) \geqslant \mathrm{N}_\infty(\Phi)$$

Par définition de la norme subordonnée $\|\cdot\|$,

$$\|\Lambda\| \geqslant \mathrm{N}_\infty(\Phi)$$

À l'aide de l'inégalité démontrée en I.3.1, on conclut que

$$\boxed{\|\Lambda\| = \mathrm{N}_\infty(\Phi)}$$

I.4.1 Pour tout $i \in [\![0\,;p-1]\!]$, le théorème de Rolle appliqué à la restriction de la fonction g à l'intervalle $[\,c_i\,;c_{i+1}\,]$, continue sur $[\,c_i\,;c_{i+1}\,]$, dérivable sur $]\,c_i\,;c_{i+1}\,[$, et telle que $g(c_i) = g(c_{i+1})$ certifie que la fonction g' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]\,c_i\,;c_{i+1}\,[$. Les p intervalles $]\,c_i\,;c_{i+1}\,[$ étant deux à deux disjoints et inclus dans $[\,a\,;b\,]$, il vient

$$\boxed{g' \text{ s'annule en au moins } p \text{ points de } [\,a\,;b\,].}$$

I.4.2 Montrons par récurrence sur $k \in [\![0\,;p]\!]$ que la propriété

$\mathscr{P}(k)$: la fonction $g^{(k)} \in \mathrm{C}^{p-k}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et s'annule en au moins $p-k+1$ points distincts de $[\,a\,;b\,]$

est vraie pour tout $k \in [\![0\,;p]\!]$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ correspond à l'hypothèse sur la fonction g.
- $\underline{\mathscr{P}(1)}$ a été obtenue à la question précédente.
- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$: Afin de montrer l'hérédité, supposons $\mathscr{P}(k)$ vérifiée pour $\underline{\text{un } k \in [\![0\,;p-1]\!]}$ donné et appliquons le résultat de la question précédente à la fonction $\widetilde{g} = g^{(k)}$ qui est à valeurs réelles, de classe $\widetilde{p} = p-k$ sur $[\,a\,;b\,]$, et qui s'annule au moins $\widetilde{p}+1$ fois sur ce segment par hypothèse de récurrence. Puisque $\widetilde{p} \geqslant 1$, le résultat de la question précédente certifie que $\widetilde{g}' = g^{(k+1)}$, qui est de classe $\widetilde{p}-1 = p-(k+1)$ sur $[\,a\,;b\,]$, s'y annule en au moins $\widetilde{p} = p-k = p-(k+1)+1$ points distincts. Cela signifie que $\mathscr{P}(k+1)$ est vérifiée.

En particulier, $\mathscr{P}(p)$ assure que

$$\boxed{g^{(p)} \text{ s'annule au moins une fois sur } [\,a\,;b\,].}$$

I.5.1 Puisque P_n et P_{n+1} sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $n+1$, on sait que

$$\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}]$$

En outre, pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, on a

$$(\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n)(x_i) = \mathrm{P}_{n+1}(x_i) - \mathrm{P}_n(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

Par conséquent, $\prod_{i=0}^{n}(\mathrm{X}-x_i)$ divise $\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n$. Puisque T_{n+1} est exactement de degré $n+1$, ceci s'écrit encore

$$\exists r \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n = r\,\mathrm{T}_{n+1}$$

Finalement, $\boxed{\exists r \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}_{n+1}(x)-\mathrm{P}_n(x) = r\,\mathrm{T}_{n+1}(x)}$

I.5.2 Puisque $f \in \mathrm{C}^{n+1}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$, il en est de même de $g = f - \mathrm{P}_{n+1}$. En outre,

$$\forall i \in [\![\,0\,;n\,]\!] \qquad g(x_i) = f(x_i) - \mathrm{P}_{n+1}(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

donc la fonction g s'annule en $n+1$ points de $[\,a\,;b\,]$. Appliquons le résultat de la question I.4.2 à la fonction g avec $p = n+1$ pour obtenir

$$\exists \beta \in [\,a\,;b\,] \qquad g^{(n+1)}(\beta) = 0$$

En particulier, $$f^{(n+1)}(\beta) = \mathrm{P}_{n+1}^{(n+1)}(\beta)$$

Par ailleurs, en dérivant $n+1$ fois l'identité polynomiale de la question précédente,

$$\mathrm{P}_{n+1}^{(n+1)} = r\,\mathrm{T}_{n+1}^{(n+1)} - \mathrm{P}_n^{(n+1)}$$

Or $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, d'où $\mathrm{P}_n^{(n+1)} = 0$. De plus, en développant T_{n+1}, on obtient

$$\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{X}^{n+1} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$$

donc $$\left(\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{X}^{n+1}\right)^{(n+1)} = 0$$

puis $$\mathrm{T}_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)!$$

Par suite, $$\mathrm{P}_{n+1}^{(n+1)} = r\,(n+1)!$$

En conclusion, $\boxed{\exists \beta \in [\,a\,;b\,] \qquad f^{(n+1)}(\beta) = r\,(n+1)!}$

Soit $y \in [\,a\,;b\,] \smallsetminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Considérons le polynôme P_{n+1} interpolant f aux $n+1$ points $y, x_0, \ldots, x_n$. D'après la question I.5.1,

$$\exists r \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n = r\,\mathrm{T}_{n+1}$$

Or, on a montré $$\exists \beta \in [\,a\,;b\,] \qquad r = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}$$

Par suite, $$\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}\mathrm{T}_{n+1}$$

Évaluons cette relation en y et utilisons l'égalité $\mathrm{P}_{n+1}(y) = f(y)$ pour obtenir

$$\boxed{f(y) - \mathrm{P}_n(y) = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}\mathrm{T}_{n+1}(y)}$$

I.5.3 Lorsque $y \in \{x_0, \ldots, x_n\}$,

$$\mathrm{P}_n(y) = f(y) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_{n+1}(y) = 0$$

donc l'égalité démontrée à la question précédente est vraie pour tout $\beta \in [\,a\,;b\,]$.

> La quantité $f - \mathrm{P}_n(f)$ s'appelle erreur d'interpolation de f par P_n.

Partie II

$\boxed{\textbf{II.1.1}}$ La fonction $t \mapsto \prod\limits_{i=0}^{n} (t-i)$ est polynomiale, donc continue sur $[\,0\,;n\,]$. De plus, la fonction $y \mapsto |y|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction φ est donc continue sur $[\,0\,;n\,]$. Puisque le segment $[\,0\,;n\,]$ est compact, il vient

$$\boxed{\varphi \text{ admet un maximum sur } [\,0\,;n\,].}$$

$\boxed{\textbf{II.1.2}}$ Soit $t \in [\,0\,;n\,]$. Écrivons

$$\begin{aligned}
\varphi(n-t) &= \left|\prod_{i=0}^{n} ((n-t)-i)\right| \\
&= \left|\prod_{i=0}^{n} (-t+(n-i))\right| \\
&= \left|\prod_{i=0}^{n} (-1)\,(t-(n-i))\right| \\
&= \left|(-1)^{n+1}\prod_{i=0}^{n} (t-(n-i))\right| \\
&= \left|\prod_{i=0}^{n} (t-(n-i))\right| \\
&= \left|\prod_{i=0}^{n} (t-i)\right|
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(n-t) = \varphi(t)}$$

en utilisant la bijection $i \mapsto n-i$ de $[\![\,0\,;n\,]\!]$ dans lui-même et la commutativité du produit de nombres réels.

$\boxed{\textbf{II.1.3}}$ Puisque $t \notin \mathbb{N}$, on a $\varphi(t) \neq 0$. En outre,

$$\varphi(t-1) = \prod_{i=0}^{n} (t-1-i) = \prod_{i=0}^{n} (t-(1+i)) = \prod_{i=1}^{n+1} (t-i)$$

Par suite,
$$\frac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)} = \frac{\left|\prod\limits_{i=1}^{n+1} (t-i)\right|}{\left|\prod\limits_{i=0}^{n} (t-i)\right|}$$

et
$$\boxed{\frac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)} = \left|\frac{t-(n+1)}{t}\right|}$$

Soit $t \in [\,1\,;n/2\,]$. Distinguons deux cas.

- Supposons $t \notin \mathbb{N}$. Puisque $1 \leqslant t \leqslant n/2$,

$$\frac{2}{n} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1$$

d'où $$2\frac{n+1}{n} \leqslant \frac{n+1}{t} \leqslant n+1 \qquad \text{car } n+1 \geqslant 0$$

puis $$2\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{n+1}{t} - 1 \leqslant n$$

et donc $$1+\frac{2}{n} \leqslant \frac{(n+1)-t}{t} \leqslant n$$

Par suite, puisque $t \notin \mathbb{N}$, $\quad 1+\dfrac{2}{n} \leqslant \dfrac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)}$

Puisque $\varphi(t) > 0$ et $1+\dfrac{2}{n} \geqslant 1$, on obtient finalement

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(t-1)$$

- Supposons $t \in \mathbb{N}$. Dans ce cas,

$$t-1 \in \left[\,0\,;\frac{n}{2}-1\,\right] \qquad \text{et} \qquad t-1 \in \mathbb{N}$$

Par conséquent, $\quad \varphi(t-1) = 0 \qquad$ et $\qquad \varphi(t) = 0$

L'inégalité $\varphi(t) \leqslant \varphi(t-1)$ est donc encore vérifiée.

En résumé, $$\boxed{\forall t \in \left[\,1\,;\frac{n}{2}\,\right] \qquad \varphi(t) \leqslant \varphi(t-1)}$$

II.1.4 Supposons dans un premier temps que $p = 1$. La fonction φ est définie et continue sur $[\,0\,;2\,]$. D'après la question II.1.2, pour tout $t \in [\,0\,;2\,]$, $\varphi(2-t) = \varphi(t)$. On en déduit que

$$\operatorname*{Sup}_{[\,0\,;2\,]} \varphi = \operatorname*{Sup}_{[\,0\,;1\,]} \varphi$$

La fonction φ (respectivement la restriction de φ à $[\,0\,;1\,]$) est continue sur $[\,0\,;2\,]$ (resp. $[\,0\,;1\,]$) donc elle est bornée sur $[\,0\,;2\,]$ (resp. $[\,0\,;1\,]$) et y atteint ses bornes. L'égalité précédente s'écrit alors

$$\operatorname*{Max}_{[\,0\,;2\,]} \varphi = \operatorname*{Max}_{[\,0\,;1\,]} \varphi$$

Par suite, $$\boxed{\varphi \text{ atteint son maximum en un point de } [\,0\,;1\,].}$$

Supposons désormais $p \geqslant 2$. Comme précédemment, à l'aide de la question II.1.2,

$$\operatorname*{Max}_{[\,0\,;n\,]} \varphi = \operatorname*{Max}_{[\,0\,;p\,]} \varphi$$

Écrivons que $$\operatorname*{Max}_{[\,0\,;p\,]} \varphi = \operatorname*{Max}_{i\in\{0,\ldots,p-1\}} \left(\operatorname*{Max}_{[\,i\,;i+1\,]} \varphi\right)$$

Or, d'après la question II.1.3,

$$\forall i \in \{1,\ldots,p-1\} \qquad \operatorname*{Max}_{[\,i-1\,;i\,]} \varphi \geqslant \operatorname*{Max}_{[\,i\,;i+1\,]} \varphi$$

Par suite, $$\operatorname*{Max}_{i\in\{0,\ldots,p-1\}} \left(\operatorname*{Max}_{[\,i\,;i+1\,]} \varphi\right) = \operatorname*{Max}_{[\,0\,;1\,]} \varphi$$

donc $$\operatorname*{Max}_{[\,0\,;n\,]} \varphi = \operatorname*{Max}_{[\,0\,;1\,]} \varphi$$

puis $$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ atteint son maximum en un point de } [\,0\,;1\,].}$$

II.2.1 Pour $t \notin \mathbb{N}$, chacun des termes du produit définissant φ est non nul. Par suite, $\varphi(t) > 0$ et l'on a

$$\ln(\varphi(t)) = \ln\left(\prod_{i=0}^{n} |t-i|\right) = \sum_{i=0}^{n} \ln|t-i|$$

Puisque φ est strictement positive et dérivable sur tout intervalle $]\,k\,;k+1\,[$ où $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$, on en déduit qu'il en est de même de la fonction $\ln\varphi$ et que, sur un tel intervalle, la dérivée en t de cette dernière vaut

$$\boxed{\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{t-i}}$$

II.2.2 Soit $t \in [\,1/2\,;1\,]$ et $k \in [\![\,2\,;n\,]\!]$. Puisque $-k \leqslant -2$ et $t \leqslant 1$, il vient $t-k \leqslant 1-2 < 0$. Par suite, $1/(t-k) < 0$. Par sommation,

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{t-k} < 0}$$

Puisque $1/2 \leqslant t$, on a $1/t \leqslant 2$. Le fait que $t \in [\,1/2\,;1\,[$ assure également que

$$-\frac{1}{2} \leqslant t-1 < 0$$

Par suite, $$\frac{1}{t-1} \leqslant -2$$

Par addition, $$\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} \leqslant 2-2 = 0$$

Ceci assure, par addition avec l'inégalité montrée précédemment,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k} < 0}$$

À l'aide de la question précédente, il vient, pour $t \in [\,1/2\,;1\,[$,

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}\right)$$

Puisque $\varphi(t) > 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k} < 0$, on obtient par produit

$$\boxed{\forall t \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right[\qquad \varphi'(t) < 0}$$

II.2.3 La fonction g est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$ comme somme de fonctions ayant cette propriété. Ainsi, pour $t \in]\,0\,;1\,[$,

$$\boxed{g'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t-k)^2}}$$

Par suite, g' est strictement négative sur l'intervalle $]\,0\,;1\,[$. On en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est strictement décroissante sur }]\,0\,;1\,[.}$$

Puisque g est strictement monotone sur $]\,0\,;1\,[$, g s'annule au plus une fois sur l'intervalle $]\,0\,;1\,[$. En outre, pour $t \in\ ]\,0\,;1\,[$,

$$\varphi'(t) = \varphi(t)\,g(t)$$

et de plus $\varphi(t) \neq 0$. Par conséquent, la fonction φ' s'annule sur $]\,0\,;1\,[$ si et seulement si g s'annule sur $]\,0\,;1\,[$. Finalement,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi' \text{ s'annule au plus une fois sur }]\,0\,;1\,[.}$$

II.2.4 Rappelons que l'on a admis en II.1.4 que φ atteint son maximum en un point de $[\,0\,;1\,]$. Puisque $\varphi > 0$ sur $]\,0\,;1\,[$ et $\varphi\,(0) = \varphi\,(1) = 0$, la fonction φ atteint son maximum en au moins un point t_n de $]\,0\,;1\,[$. Comme elle est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$, $\varphi'(t_n) = 0$. En outre, d'après la question précédente, φ' s'annule au plus une fois sur $]\,0\,;1\,[$, donc t_n est unique. Puisqu'en ce point la dérivée de φ est nulle, la question II.2.2 permet d'affirmer que $t_n \in\ ]\,0\,;1/2\,[$. En résumé,

$$\boxed{\varphi \text{ atteint son maximum en un point et un seul de } \left]\,0\,;\frac{1}{2}\,\right[.}$$

En ce point, on a, d'après II.2.1,

$$\varphi'(t_n) = 0 = \varphi(t)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n - k}\right)$$

Puisque $t_n \in\ ]\,0\,;1\,[$, on a $\varphi(t_n) > 0$. Par suite,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n - k} = 0}$$

II.3.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\qquad 0 < t_n < 1$

on a $\qquad -1 < -t_n < 0$

donc $\qquad k - 1 < k - t_n < k$

Puisque $k - 1 \geqslant 0$, on peut déduire de ce qui précède

$$\boxed{\frac{1}{k} < \frac{1}{k - t_n}}$$

On a montré en II.2.4 que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n - k} = \frac{1}{t_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_n - k} = 0$$

Par suite, $$\frac{1}{t_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - t_n} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{car } 0 < t_n < 1$$

Ceci implique $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1}{t_n}}$$

II.3.2 Rappelons que

$$\boxed{\text{La série de terme général positif } \sum_{k} \frac{1}{k} \text{ est divergente.}}$$

Ainsi, $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Par minoration, on obtient à l'aide de la question précédente que

$$\boxed{\frac{1}{t_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

Par suite, $$\boxed{t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+}$$

II.4.1 Soit $k \in [\![1\,; n]\!]$. La fonction

$$f_k : \begin{cases} [\,k\,; k+1\,] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \qquad t \qquad \longmapsto \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

est continue sur $[\,k\,; k+1\,]$ et strictement positive sur $]\,k\,; k+1\,]$. Par suite,

$$\int_k^{k+1} f_k(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

Ceci implique $$0 < \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

donc $$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} < \frac{1}{k}$$

Sommant pour $k \in [\![1\,; n]\!]$, il vient, à l'aide de la relation de Chasles,

$$\boxed{\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

II.4.2 On a montré en II.3.1 que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1}{t_n}$$

À l'aide de la question précédente, on en déduit que

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} < \frac{1}{t_n}$$

c'est-à-dire que $$\ln(n+1) - \ln 1 < \frac{1}{t_n}$$

Par conséquent, $$\boxed{t_n < \frac{1}{\ln(n+1)}}$$

II.4.3 Par définition de t_n,

$$\forall t \in [\,0\,; n\,] \qquad \varphi(t) \leqslant \varphi(t_n)$$

Puisque $t_n \in \,]\,0\,; 1/2\,[$ d'après la question II.2.4,

$$\forall k \in [\![1\,; n]\!] \qquad |t_n - k| = k - t_n \leqslant k$$

Par suite, $$\varphi(t_n) = t_n \prod_{k=1}^{n} |t_n - k| \leqslant t_n \prod_{k=1}^{n} k = t_n n!$$

Le résultat de la question précédente assure que

$$\varphi(t_n) < \frac{n!}{\ln(n+1)}$$

Finalement, $$\boxed{\forall t \in [\,0\,;n\,] \qquad \varphi(t) < \frac{n!}{\ln(n+1)}}$$

II.5.1 Écrivons, puisque $x = a + t\,h$ et $x_i = a + i\,h$,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{T}_{n+1}(x)| &= \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \\
&= \prod_{i=0}^{n} |t\,h - i\,h| \\
&= \prod_{i=0}^{n} |h(t-i)| \\
&= |h|^{n+1} \left|\prod_{i=0}^{n} (t-i)\right|
\end{aligned}$$

$$\boxed{|\mathrm{T}_{n+1}(x)| = h^{n+1}\varphi(t)}$$

II.5.2 Fixons $y \in [\,a\,;b\,]$. D'après la question I.5.3, il existe $\beta \in [\,a\,;b\,]$ tel que

$$f(y) - \mathrm{P}_n(y) = \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{T}_{n+1}(y) f^{(n+1)}(\beta)$$

Posons comme à la question précédente $t = (y-a)/h$. Cela certifie que

$$|\mathrm{T}_{n+1}(y)| = h^{n+1}\varphi(t)$$

Par suite, $$\begin{aligned}
|f(y) - \mathrm{P}_n(y)| &= \frac{1}{(n+1)!}\,|\mathrm{T}_{n+1}(y)|\,\left|f^{(n+1)}(\beta)\right| \\
&= \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1}\varphi(t)\,\left|f^{(n+1)}(\beta)\right|
\end{aligned}$$

À l'aide de la question II.4.3, on obtient

$$|f(y) - \mathrm{P}_n(y)| \leqslant \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{\ln(n+1)}\left|f^{(n+1)}(\beta)\right|$$

puis, par définition de $\mathrm{N}_\infty\left(f^{n+1}\right)$,

$$|f(y) - \mathrm{P}_n(y)| \leqslant \frac{h^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}\mathrm{N}_\infty(f^{(n+1)})$$

Cette majoration étant indépendante de $y \in [\,a\,;b\,]$ et valable pour tout $y \in [\,a\,;b\,]$, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{N}_\infty(f - \mathrm{P}_n) \leqslant \frac{h^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}\mathrm{N}_\infty(f^{(n+1)})}$$

Partie III

III.1 Par définition de L_k, on a

$$\mathrm{L}_k(\mathrm{X}) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (\mathrm{X} - x_i) \Big/ \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i)$$

Par suite, $$w_k^{-1}\mathrm{L}_k(\mathrm{X}) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (\mathrm{X} - x_i) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} (\mathrm{X} - x_i)}{\mathrm{X} - x_k}$$

On en déduit que $$w_k^{-1}(\mathrm{X} - x_k)\mathrm{L}_k(\mathrm{X}) = \mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X})$$

Finalement, $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{T}_{n+1}(x) = w_k^{-1}(x - x_k)\mathrm{L}_k(x)}$$

III.2 À l'aide de I.2.1, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\mathrm{L}_k(x)$$

Si $x \neq x_k$, alors d'après la question précédente,

$$\mathrm{L}_k(x) = \frac{w_k}{(x - x_k)}\mathrm{T}_{n+1}(x)$$

Par conséquent, si x est différent de tous les x_i,

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{w_k}{(x - x_k)}\mathrm{T}_{n+1}(x)$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{x_0, \ldots, x_n\}$,

$$\boxed{\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{T}_{n+1}(x)\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k f(x_k)}{x - x_k}} \qquad (\mathbf{3})$$

Appliquons ce résultat à la fonction f constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ tout entier. Puisque P_n est aussi la fonction constante égale à 1, il vient pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{x_0, \ldots, x_n\}$,

$$\boxed{\mathrm{T}_{n+1}(x)\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x - x_k} = 1}$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{x_0, \ldots, x_n\}$,

$$\mathrm{T}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{w_k}{x - x_k}}$$

Insérant cette expression de T_{n+1} dans (**3**), il vient, pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{x_0, \ldots, x_n\}$,

$$\boxed{\mathrm{P}_n(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{w_k}{x - x_k} f(x_k)}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{w_k}{x - x_k}}} \qquad (\mathbf{4})$$

III.3.1 Calculons

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w_k} &= \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i) \\
&= \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (a + k\,h - (a + i\,h)) \\
&= \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (h(k-i)) \\
&= h^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (k-i) \\
&= h^n \prod_{i=0}^{k-1} (k-i) \times \prod_{i=k+1}^{n} (k-i) \\
&= h^n \underbrace{k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}_{=k!} \times \underbrace{(-1) \times (-2) \times \cdots \times (-(n-k))}_{=(-1)^{n-k}(n-k)!} \\
\frac{1}{w_k} &= (-1)^{n-k} h^n k! (n-k)!
\end{aligned}
$$

Finalement, $$\boxed{w_k = \frac{(-1)^{n-k}}{h^n\, k!\,(n-k)!}}$$

Ainsi,
$$
\begin{aligned}
w_k^\star &= (-1)^n h^n\, n!\, w_k \\
&= (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!}
\end{aligned}
$$
$$\boxed{w_k^\star = (-1)^k \binom{n}{k}}$$

$\boxed{\textbf{III.3.2}}$ À l'aide de la question précédente, pour tout $k \in [\![\, 0\,; n \,]\!]$,

$$w_k = \frac{(-1)^n}{h^n\, n!} w_k^\star = \frac{(-1)^n}{h^n\, n!} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Par conséquent, pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{x_0, \ldots, x_n\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k f(x_k)}{x - x_k} = \frac{(-1)^n}{h^n\, n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{f(x_k)}{x - x_k}$$

et, de même, $$\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x - x_k} = \frac{(-1)^n}{h^n\, n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{x - x_k}$$

Par simplification par $\dfrac{(-1)^n}{h^n\, n!}$ dans la formule (**4**) démontrée en III.2, il vient

$$\boxed{\mathrm{P}_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{f(x_k)}{x - x_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{x - x_k}}} \qquad (\mathbf{5})$$

III.4.1 Les $4n+1$ points équidistants entre $-2n$ et $2n$ sont distants de 1, donc

$$\boxed{\forall k \in [\![\, 0\,; 4n\,]\!] \qquad x_k = -2n + k}$$

> On peut par exemple appliquer la formule
> $$x_i = a + i\,h$$
> donnée en II.5 avec $a = -2n$, $b = 2n$ et $h = \dfrac{2n - (-2n)}{4n} = 1$.

III.4.2 Calculons, pour $k \in [\![\, 0\,; 4n\,]\!]$, à l'aide de la question précédente,

$$\begin{aligned}
f(x_k) = \cos\left(\frac{\pi x_k}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(k-2n)\right)\\
&= \cos\left(k\frac{\pi}{2} - n\pi\right)\\
&= \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\cos(n\pi) + \sin k\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(n\pi)\\
f(x_k) &= (-1)^n \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

car $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{4n} (-1)^k \binom{4n}{k} \frac{f(x_k)}{x - x_k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{4n} (-1)^k \binom{4n}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)}{x - (k-2n)}$$

Rappelons que $\qquad \cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ (-1)^{k/2} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$

La somme précédente, dont tous les termes d'indice impair sont nuls, peut être réindexée par p en posant $k = 2p$:

$$\sum_{k=0}^{4n} (-1)^k \binom{4n}{k} \frac{f(x_k)}{x - x_k} = (-1)^n \sum_{p=0}^{2n} (-1)^{2p} \binom{4n}{2p} \frac{(-1)^p}{x - 2(p-n)}$$

Changeons l'indice de sommation dans cette dernière somme en posant $k = p - n$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{4n} (-1)^k \binom{4n}{k} \frac{\mathcal{S}(x_k)}{x - x_k} &= (-1)^n \sum_{k=-n}^{n} \binom{4n}{2(n+k)} \frac{(-1)^{k+n}}{x - 2k}\\
&= \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \binom{4n}{2n+2k} \frac{1}{x - 2k}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, par changement d'indice $k' = k - 2n$,

$$\sum_{k=0}^{4n} (-1)^k \binom{4n}{k} \frac{1}{x - x_k} = \sum_{k=-2n}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2n+k} \frac{1}{x - k}$$

donc on obtient, en appliquant la formule (**5**) établie à la question III.3.2 à la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(\pi x/2)$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \ldots, x_{4n}\}$,

$$\boxed{\mathrm{P}_{4n}(f)(x) = \frac{\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \binom{4n}{2n+2k} \frac{1}{x - 2k}}{\displaystyle\sum_{k=-2n}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2n+k} \frac{1}{x - k}}}$$

III.4.3 Rappelons que p est l'unique entier relatif tel que

$$x \in [\, p\,;p+1\,[$$

- Si $k \in [\![-2n\,;p]\!]$, $\qquad |x-k| = x-k \leqslant (p+1)-k$
- Si $k \in [\![p+1\,;2n]\!]$, $\qquad |x-k| = k-x \leqslant k-p$

Ainsi, pour $x \in [\,-2n\,;2n\,[$,

$$\begin{aligned}\prod_{k=-2n}^{2n} |x-k| &= \prod_{k=-2n}^{p} |x-k| \times \prod_{k=p+1}^{2n} |x-k| \\ &\leqslant \prod_{k=-2n}^{p} ((p+1)-k) \times \prod_{k=p+1}^{2n} (k-p)\end{aligned}$$

$$\boxed{\prod_{k=-2n}^{2n} |x-k| \leqslant (2n+p+1)! \times (2n-p)!}$$

et cette inégalité est triviale lorsque $x = 2n$.

III.4.4 La fonction $f : x \mapsto \cos((\pi x)/2)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc elle est de classe $\mathscr{C}^{4n+1}$ sur $[\,-n\,;n\,]$. Puisque P_{4n} est son polynôme d'interpolation aux $4n+1$ points $x_i = i-2n$ pour $i \in [\![0\,;4n]\!]$ d'après la question III.4.2, on peut appliquer le résultat de la question I.5.3 :

$$\forall\, y \in [\,-2n\,;2n\,] \quad \exists\, \beta \in [\,-2n\,;2n\,] \quad f(y) - \mathrm{P}_{4n}(y) = \frac{1}{(4n+1)!}\mathrm{T}_{4n+1}(y) f^{(4n+1)}(\beta)$$

Remarquons que $\qquad f^{(4n+1)}(\beta) = -\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{4n+1} \sin\left(\dfrac{\pi\beta}{2}\right)$

donc $\qquad \left|f^{(4n+1)}(\beta)\right| \leqslant \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{4n+1}$

En outre, pour $x \in [\,-2n\,;2n\,]$,

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{(4n+1)}(x) &= \prod_{i=0}^{4n} (x-x_i) \\ &= \prod_{i=0}^{4n} (x-(i-2n)) \\ \mathrm{T}_{(4n+1)}(x) &= \prod_{k=-2n}^{2n} (x-k) \qquad \text{en posant } k = i-2n\end{aligned}$$

Par suite, à l'aide de la question précédente, on obtient la majoration

$$\left|\mathrm{T}_{(4n+1)}(x)\right| \leqslant (2n+p+1)!(2n-p)!$$

On en déduit que, pour tout $x \in [\,-2n\,;2n\,]$,

$$\boxed{|f(x) - \mathrm{P}_{4n}(x)| \leqslant (2n+p+1)!(2n-p)!\frac{(\pi/2)^{4n+1}}{(4n+1)!}}$$

Écrivons à l'aide de la formule de Stirling

$$(2n+p+1)! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{2n+p+1}{\mathrm{e}}\right)^{2n+p+1} \sqrt{2\pi(2n+p+1)}$$

puis $\qquad (2n-p)! \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2n-p}{\mathrm{e}}\right)^{2n-p} \sqrt{2\pi(2n-p)}$

et $\qquad (4n+1)! \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{4n+1}{\mathrm{e}}\right)^{4n+1} \sqrt{2\pi(4n+1)}$

Par produit et quotient d'équivalents non nuls, on obtient

$$\begin{aligned}
\theta(n,p) &\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\,\frac{(2n+p+1)^{2n+p+1}(2n-p)^{2n-p}}{(4n+1)^{4n+1}}\sqrt{\frac{(2n+p+1)(2n-p)}{4n+1}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}\\
&\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\,\frac{(2n+p+1)^{p+1}}{(4n+1)(2n-p)^{p}}\left(\frac{(2n+p+1)(2n-p)}{(4n+1)^2}\right)^{2n}\sqrt{\frac{4n^2}{4n}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}\\
&\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\,\frac{2^{p+1}n^{p+1}}{4n\,2^p\,n^p}\sqrt{n}\left(\frac{4n^2+2n(p+1-p)-p(p+1)}{16n^2+8n+1}\right)^{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}\\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}}{2}\left(\frac{4n^2\left(1+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{p(p+1)}{4n^2}\right)}{16n^2\left(1+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{16n^2}\right)}\right)^{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}\\
\theta(n,p) &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\left(\frac{1+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{p(p+1)}{4n^2}}{1+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{16n^2}}\right)^{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}
\end{aligned}$$

Posons $u_n = \dfrac{1+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{p(p+1)}{4n^2}}{1+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{16n^2}}$ et écrivons que

$$1+\frac{1}{2n}-\frac{p(p+1)}{4n^2} = 1+\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{16n^2}} = 1-\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $$u_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par suite, $$\ln(u_n) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $$2n\ln(u_n) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par conséquent, $$\exp\left(2n\ln(u_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

c'est-à-dire $${u_n}^{2n} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

On en déduit que $$\theta(n,p) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}$$

Ceci s'écrit encore $$\theta(n,p) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{4n+1}$$

Puisque $\dfrac{\pi}{4} < 1$, on obtient finalement

$$\boxed{\theta(n,p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

> Ceci implique que la suite de polynômes $(\mathrm{P}_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment.