

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}), \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

1. On prend dans cette question, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

1.1 Vérifier que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

1.2 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$

1.3 Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

2. On prend dans cette question, $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$, $n \geq 2$ et $a_1 = 0$.

2.1 Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$.

2.2 Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$?

2.3 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n$.

2.4 Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} b_n$?

3. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

3.1 Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n a_{2n} \leq u_n$.

3.2 En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_{2n}$.

3.3 Démontrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$.

3.4 Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.

3.5 A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

4. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

4.1 Vérifier que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, m \leq n, B_n \geq A_m - m a_{n+1}$.

4.2 En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

4.3 Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

EXERCICE 3

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si à la fois :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet a_1 \geq 1, \\ \bullet \text{ la suite } (a_n) \text{ est bornée,} \\ \bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0, \\ \bullet \text{ la série } \sum_{n \geq 0} a_n \text{ diverge.} \end{array} \right.$$

On note alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ et } \forall n \geq 2, b_n = \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{A_k}$$

Dans tout l'exercice, on utilisera sans le démontrer la propriété suivante, notée (R) :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes strictement positifs.

$$\text{Si : } \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ \quad \quad \quad \text{et} \\ (b) \text{ la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ diverge} \end{array} \right. \quad \text{alors : } \quad \sum_{k=1}^n u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n v_k$$

1. Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

En utilisant les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et la propriété (R) , prouver que :

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

2. 2.1 De façon analogue, montrer que :

$$T_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

- 2.2 En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ ($n \geq 2$).

- 2.3 Retrouver ce résultat sans utiliser la propriété (R) .

3. Etude de deux exemples.

- 3.1 On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 1$.

- Vérifier que la suite (a_n) ainsi définie satisfait à la propriété (P) .
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

- 3.2 On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n}$.

- Vérifier que la suite (a_n) ainsi définie satisfait à la propriété (P) .
- En utilisant la propriété (R) et la série $\sum_{n \geq 2} w_n$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

4. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P) .

- 4.1 Montrer que $A_n \underset{+\infty}{\sim} A_{n-1}$

- 4.2 Prouver que :

$$\frac{a_n}{A_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln \left(\frac{A_n}{A_{n-1}} \right)$$

4.3 Déterminer alors la nature de la série : $\sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{A_n}$.

4.4 A l'aide de la propriété (R) et des questions précédentes, déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

5. Soit (u_n) le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente.

Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet v_n = o(u_n) \\ \bullet \text{ la série } \sum_{n \geq 1} v_n \text{ diverge} \end{array} \right.$$

QUATRIÈME PARTIE

Dans toute cette partie, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ désigne une suite réelle convergente vers 0. Cette suite est supposée de plus décroissante à partir de la question 4.4.

4.1 Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle la série de terme général λ_k diverge vers $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \lambda_k a_k}{\sum_{k=0}^n \lambda_k} = 0$$

4.2 On définit Δ l'opérateur opérant sur une suite quelconque $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par la relation:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (\Delta u)_k = u_k - u_{k+1}$$

puis on note Δ^n la puissance itérée n -ième de l'opérateur Δ :

$$\Delta^0 = \text{Id et pour tout } n \in \mathbb{N}, \Delta^{n+1} = \Delta \circ \Delta^n$$

Montrer que pour tous k et n dans $\mathbb{N}$, on a

$$(\Delta^n u)_k = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i}$$

4.3 Montrer, à n fixé dans $\mathbb{N}$, que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\Delta^n a)_k = 0$ et, à k fixé dans $\mathbb{N}$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} = 0$.

4.4 On suppose à partir de maintenant que la suite $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est décroissante et convergente vers 0. On note S la somme de la série alternée de terme général $(-1)^k a_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

On définit pour tous k et n dans $\mathbf{N}$:

$$a_n^{(k)} = (-1)^k \left[\frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} - \frac{(\Delta^{n+1} a)_k}{2^{n+1}} \right]$$

Montrer, à k fixé dans $\mathbf{N}$, que la série de terme général $(a_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente avec pour somme:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k a_k$$

et, à n fixé dans $\mathbf{N}$, que la série de terme général $(a_n^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ est convergente avec pour somme:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = \frac{(\Delta^n a)_0}{2^{n+1}}.$$

4.5 On note $r_m^{(k)} = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n^{(k)}$. Montrer que la série de terme général $(r_m^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ est convergente. On note R_m sa somme.

4.6 Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} R_m = 0$ et $\sum_{m=0}^n \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = R_0 - R_{n+1}$.

4.7 En déduire que la série de terme général $\left(\frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \right)_{m \in \mathbf{N}}$ est convergente et a pour somme S .

4.8 On suppose en outre que la suite $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ peut s'écrire sous la forme $a_k = f(k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ où f est une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et telle que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathbf{R}_+, \quad (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$$

Montrer dans ce cas que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $k \in \mathbf{N}$, $(\Delta^n a)_k \geq 0$. En déduire que pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$0 \leq \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \leq \frac{a_0}{2^{m+1}}.$$

4.9 En appliquant les résultats de cette partie à la suite de terme général $a_k = \frac{1}{k+1}$, proposer une méthode d'approximation de $\ln 2$ avec une précision $\epsilon > 0$ donnée. Quelle expression de $\ln 2$ retrouve-t-on?