

SESSION 2005

PSIM104



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures***Les calculatrices sont autorisées.*

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Notation et Objectifs :

On note :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes,
- $\mathcal{C}^0$: le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
- $\mathcal{C}_1^0$: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ des fonctions f 1-périodique (c'est-à-dire telles que $f(x+1) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Dans tout ce problème, on désigne par θ l'application de $\mathcal{C}^0$ dans $\mathcal{C}^0$, définie par :
pour tout $f \in \mathcal{C}^0$, $\theta(f) = F$ où F est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x , associe $\int_x^{x+1} f(t) dt$.

On admet que θ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0$.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction F et de l'endomorphisme θ .

PARTIE I

Quelques propriétés de $F = \theta(f)$

I.1/ Exemples.

I.1.1/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1$.

I.1.2/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^k$ (où k est fixé dans $\mathbb{N}^*$).

I.2/ Variation de $F = \theta(f)$.

On désigne maintenant par f une fonction arbitraire de $\mathcal{C}^0$.

I.2.1/ Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter $F'(x)$ en fonction de f et de x .

I.2.2/ Montrer que si la fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $J_{x_0} = [x_0, +\infty[$, alors la fonction F est croissante (respectivement décroissante) sur J_{x_0} .

I.2.3/ Montrer que la fonction $F = \theta(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f appartient à $\mathcal{C}_1^0$.

I.2.4/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(\pi t)|$.

On suppose de nouveau que f désigne une fonction arbitraire de $\mathcal{C}^0$.

I.2.5/ On suppose que la fonction f admet une limite finie L_f en $+\infty$.

Montrer que la fonction F admet une limite L_2 (que l'on explicitera) en $+\infty$; on pourra étudier d'abord le cas où $L_f = 0$.

I.3/ Propriétés du graphe de F .

Soient $f \in \mathcal{C}^0$ et $F = \theta(f)$.

On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(u) = F\left(u - \frac{1}{2}\right) = \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} f(t) dt$.

I.3.1/ Comparer $\psi(-u)$ et $\psi(u)$, si la fonction f est impaire (respectivement paire).

I.3.2/ Quelle propriété géométrique de la représentation graphique de la fonction F peut-on déduire des résultats obtenus en I.3.1, si la fonction f est impaire (respectivement paire) ?

PARTIE II

L'endomorphisme θ

II.1/ L'endomorphisme θ est-il surjectif ?

II.2/ Sur le noyau de θ .

On note désormais $\text{Ker}\theta$ le noyau de l'endomorphisme θ .

II.2.1/ Montrer que $f \in \text{Ker}\theta \Leftrightarrow \left[f \in \mathcal{C}_1^0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt = 0 \right]$.

II.2.2/ Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}_1^0)^2$. On note $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

On admettra, sans justification, que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_1^0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note c_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $c_k(t) = \cos(2\pi kt)$.

II.2.2.1/ Vérifier que c_k appartient à $\mathcal{C}_1^0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et calculer $\langle c_j | c_k \rangle$ pour $(j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

II.2.2.2/ $\text{Ker} \theta$ est-il de dimension finie ?

II.2.3/ Soit $f \in \mathcal{C}_1^0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $\varphi_n(x) = \int_n^x f(t) dt$ pour $x \in [n, n+1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $w_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

II.2.3.1/ Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $w_n = \frac{\varphi_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt$.

II.2.3.2/ Si on suppose que f appartient à $\text{Ker} \theta$, quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} w_n ?$$

II.2.3.3/ Si on suppose que f n'appartient pas à $\text{Ker} \theta$, quelle est la nature de la

$$\text{série } \sum_{n \geq 1} w_n ?$$