

1 _____ (*) _____

Etudier la suite définie par récurrence par
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{7u_n - 6} \end{cases}$$

La fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{7x - 6}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Cherchons les points fixes de f et le signe de $f(x) - x$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x > f(x) \iff x > \sqrt[3]{7x - 6} \iff x^3 > 7x - 6 \iff x^3 - 7x + 6 > 0$$

Le polynôme $x^3 - 7x + 6$ admet une racine évidente $x = 1$ ce qui assure une factorisation du polynôme par $x - 1$ et enfin

$$x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)$$

Finalement,

$$x > f(x) \iff (x - 1)(x + 3)(x - 2) > 0 \iff x > 2 \text{ ou } x \in]-3; 1[$$

La fonction f a au passage trois points fixes $-3, 1, 2$. Notons $I_0 =]-\infty; -3]$, $I_1 =]-3; 1[$, $I_2 =]1; 2[$ et enfin $I_3 =]2; +\infty[$. Ces intervalles sont stables par f par croissance stricte de f . En effet, par exemple

$$1 < x < 2 \implies f(1) = 1 < f(x) < f(2) = 2$$

Distinguons quatre cas :

- Si $u_0 \in I_0$, alors la stabilité et le signe de $f - I_d$ impose $u_n \in I_1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante. Puisqu'elle est majorée par -3 , elle converge vers un point fixe qui ne peut alors être que -3 .
- Si $u_0 \in I_1$, alors la stabilité et le signe de $f - I_d$ impose $u_n \in I_1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement décroissante. La suite est bornée monotone donc converge vers un point fixe qui ne peut être alors que -3 .
- Si $u_0 \in I_2$, on prouve comme au cas précédent que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît vers 2 .
- $u_0 \in I_3$, on prouve cette fois que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît vers 2 .

Bien entendu, si u_0 est l'un des points fixes, la suite est constante donc convergente. Finalement,

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers -3 si $u_0 < 1$, vers 2 si $u_0 > 1$ et est constante égale à 1 sinon.

2 _____ (*) _____

Etudier la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \frac{1 + 2u_n}{1 + 3u_n}$$

- Etudier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Déterminer un réel α tel que la suite $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}$ ait une limite non nulle.
- En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- Une récurrence immédiate prouve que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives. Dès lors, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante car $1 + 2u_n < 1 + 3u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est donc convergente vers un point fixe de f et un calcul rapide montre que seul 0 est point fixe. Ainsi,

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et de limite nulle.

- Un développement limité de v_n donne

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_n^\alpha} [(1 + 3u_n)^\alpha (1 + 2u_n)^{-\alpha} - 1] \\ &= \frac{1}{u_n^\alpha} [(1 + 3\alpha u_n + O(u_n^2)) (1 - 2\alpha u_n + O(u_n^2)) - 1] \\ v_n &= \frac{1}{u_n^\alpha} [\alpha u_n + O(u_n^2)] \end{aligned}$$

et donc

$$v_n \sim \alpha u_n^{1-\alpha}$$

Il suffit maintenant de choisir $\alpha = 1$ pour avoir

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

(c). Le lemme de Césaro prouve par télescopage que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Puisque $(1/(nu_0))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, il vient $1/(nu_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ soit

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

3 ————— (**) ————— **CCP PC 2009**

Pour tout réel x , on pose

$$f(x) = \int_0^1 |x - t| \, dt$$

(a). Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$.

Que devient $f(x)$ pour $x < 0$ et $x > 1$?

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0; 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [1/4; 1/2]$.

(c). Déterminer un majorant de $|f'|$ sur $[1/4; 1/2]$ et en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on explicitera.

(d). Que se passe-t-il lorsque $u_0 > 1$?

(a). Pour $x \in [0; 1]$, on écrit

$$f(x) = \int_0^x (x - t) \, dt + \int_x^1 (t - x) \, dt = \left[\frac{-(x - t)^2}{2} \right]_0^x + \left[\frac{(t - x)^2}{2} \right]_x^1 = \frac{x^2}{2} + \frac{(1 - x)^2}{2} = x^2 - x + \frac{1}{2}$$

Pour $x \notin [0; 1]$, la fonction intégrée est de signe constant sur $[0; 1]$ et donc

$$f(x) = \int_0^1 |x - t| \, dt = \left| \int_0^1 (x - t) \, dt \right| = \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

(b). Pour tout $x \in [0; 1]$,

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}$$

On en déduit aussitôt que $f([0; 1]) = [1/4; 1/2]$. Notons $I = [1/4; 1/2]$. Alors, $I \subset [0; 1]$ donc $f(I) \subset f([0; 1]) = I$ donc I est stable par f . Ainsi, $u_0 \in [0; 1]$ donc $u_1 \in I$ et par récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$$

(c). Des calculs élémentaires montrent que $|f'|$ est majorée par $1/2$ sur I , et que f admet $\ell = 1 - \sqrt{2}/2$ comme seul point fixe sur I . Pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité des accroissements finis appliqués entre u_n et ℓ donne

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2} \cdot |u_n - \ell| \quad \text{soit} \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} \cdot |u_n - \ell|$$

Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot |u_1 - \ell|$$

ce qui assure que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite l'unique point fixe de f . Par suite,

$$\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(d). Si $u_0 > 1$, alors $u_1 = u_0 - \frac{1}{2}$. Plus généralement, tant que u_n est supérieur à 1, on a $u_n = u_0 - \frac{n}{2}$ par définition de f . Notons donc n_0 le plus petit entier tel que $u_{n_0} < 1$. Par définition,

$$u_0 - \frac{n_0}{2} < 1 \leq u_0 - \frac{n_0 - 1}{2} \quad \text{soit} \quad n_0 \leq 2u_0 - 1 < n_0 + 1 \quad \text{et donc} \quad n_0 = \lfloor 2u_0 - 1 \rfloor$$

Alors, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ satisfait la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec la condition initiale $u_{n_0} \in [0; 1]$ donc elle converge vers $1 - \sqrt{2}/2$.

Le résultat précédent reste valable lorsque $u_0 > 1$.

4

(**)

- (a). Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ a une unique solution dans $[0; 1]$. On note a_n ce réel.
- (b). Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, puis qu'elle converge. Déterminer sa limite λ .
- (c). Donner un équivalent de $a_n - \lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- (a). L'application $f_n : x \mapsto x + x^2 + \cdots + x^n$ est continue et strictement croissante donc réalise une bijection entre $[0; 1]$ et son image $[0; n]$. En particulier,

$$\boxed{\text{L'équation } x + x^2 + \cdots + x^n = 1 \text{ a une unique solution dans } [0; 1].}$$

- (b). Remarquons que pour $n \geq 2$, ni 0 ni 1 ne sont solutions de l'équation donc $a_n \in]0; 1[$. Par définition de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$f_{n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1} + \cdots + a_{n+1}^{n+1} = 1$$

Dès lors, on a $f_n(a_{n+1}) = 1 - a_{n+1}^{n+1} < 1$. Or, on sait que f_n est strictement croissante et que $f_n(a_n) = 1$ donc $a_{n+1} < a_n$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante, donc convergente car minorée par 0. Pour déterminer sa limite, on multiplie l'équation par $1 - a_n$ et il vient

$$a_n - a_n^{n+1} = 1 - a_n \quad \text{soit} \quad a_n = \frac{1}{2} (1 + a_n^{n+1})$$

Par décroissance de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $a_n^{n+1} \leq a_2^{n+1}$ avec $a_2 \in]0; 1[$ ce qui prouve que a_n^{n+1} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroît vers } 1/2.}$$

- (c). Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de accroissements finis, il existe $c_n \in [1/2; a_n]$ tel que

$$f_n(a_n) - f_n(1/2) = f'_n(c_n)(a_n - 1/2)$$

Or, $f_n(a_n) = 1$ et la somme des termes d'une suite géométrique donne $f_n(1/2) = 1 - 1/2^n$. Ainsi,

$$a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{f'_n(c_n)} \quad \text{puis} \quad \frac{1}{2^n} \frac{1}{f'_n(a_n)} \leq a_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{f'_n(1/2)}$$

par croissance de f'_n . Maintenant pour $x < 1$, on a

$$f_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{puis} \quad f'_n(x) = \frac{x - x^{n+1} + (1 - x)(1 - (n + 1)x^n)}{(1 - x)^2}$$

On déduit de cette expression que $f'_n(1/2)$ et $f'_n(a_n)$ sont deux quantités de limite $1/4$ quand n tend vers $+\infty$ (en justifiant que na_n^n est de limite nulle par une majoration similaire à celle de la deuxième question). L'encadrement assure alors l'équivalent

$$\boxed{a_n - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2^{n+2}}}$$

5

(***)

Centrale PC 2019

Pour tout $n \geq 1$, on définit f_n sur $\mathbb{R}_+^* \times]n; +\infty[$ par

$$f_n : (a, x) \mapsto \frac{a}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n} = \frac{a}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-k}$$

- (a). Soit $a > 0$ et $s > 1$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique solution, notée $x_n(a, s)$ à l'équation $f_n(a, x) = \ln s$.
- (b). Étudier la monotonie de la suite $(x_n(a, s))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- (c). (PYTHON)
- Définir une fonction prenant en argument a , n et s et renvoyant $x_n(a, s)$.
 - Représenter pour $s \in [2; 10]$ les premières valeurs de la suite $((s-1)x_n(a, s)/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Conjecture ?

- (d). Montrer que
- $$\frac{1}{n\alpha-1} + \frac{1}{n\alpha-2} + \cdots + \frac{1}{n\alpha-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)$$

- (e). Étudier la convergence et la limite de $(x_n(a, s)/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- (a). L'application $x \mapsto f_n(a, x)$ est clairement strictement décroissante sur $]n; +\infty[$ car somme de fonctions strictement décroissantes. Elle est de limite nulle en $+\infty$ et de limite $+\infty$ en n (le dernier terme de la somme tend vers $+\infty$, les autres ont une limite finie). Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]n; +\infty[$ vers $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, puisque $\ln s > 0$ lorsque $s > 1$,

Pour tout $a > 0$ et $s > 1$, l'équation $f_n(x, a) = \ln s$ admet une unique solution.

- (b). Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition,

$$f_{n+1}(a, x_{n+1}) = \frac{a}{x_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x_{n+1} - k} = f_n(x_{n+1}) + \frac{1}{x_{n+1} - (n+1)} = \ln s$$

En particulier,

$$f_n(x_{n+1}) < \ln s = f_n(x_n)$$

La fonction f_n étant strictement décroissante, on en déduit que $x_{n+1} > x_n$. Ceci étant valable pour tout entier n ,

La suite $(x_n(a, s))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

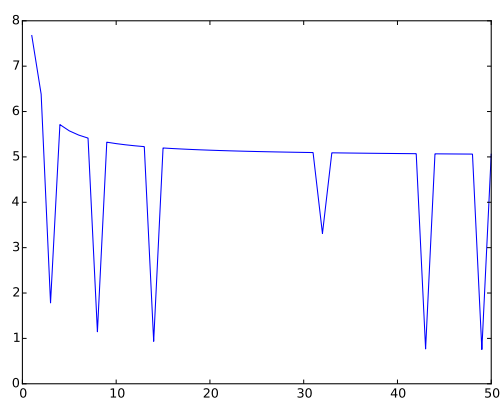
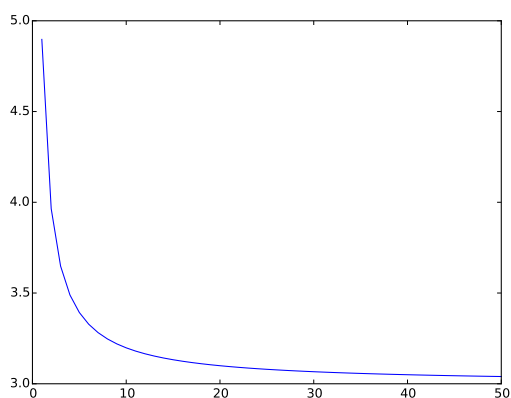
- (c). (i) Les documents d'aide du concours (volet « analyse numérique ») fournissent une fonction `fsolve` appartenant au package `scipy.optimize` pour trouver des solutions (approchées) d'une équation de la forme $f(x) = 0$. On peut alors proposer le code suivant :

```
1 def x(a,n,s):
2     def fn(x):
3         S=a/x - np.log(s)
4         for k in range(1,n+1):
5             S+=1/(x-k)
6         return S
7     return resol.fsolve(fn,2*n+1)[0]
```

- (ii) Voici un exemple de fonction pour obtenir un tracé. Elle prend en argument les valeurs de s et a ainsi qu'un entier N pour tracer la suite des N premières valeurs de $(x_n(a, s))_{n \in \mathbb{N}}$.

```
1 def test(a,N,s):
2     X=[k for k in range(1,N+1)]
3     Y=[(s-1)*x(a,n,s)/n for n in X]
4     plt.clf()
5     plt.plot(X,Y)
6     plt.show()
```

Voici deux exemples de tracés ($a = 1$, $N = 50$, $s = 3$ puis $s = 5$).



Sur le graphique pour $s = 5$, les « pics » correspondent à des valeurs de n pour lesquelles la fonction `fsolve` produit un résultat erroné. Si l'on fait abstraction de ces quelques valeurs, on peut conjecturer que $(s-1)x_n(a, s)/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$ soit encore

On peut conjecturer que $x_n(a, s) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{s}{s-1} n$

(d). Il suffit de reconnaître une somme de Riemann. En effet, en posant $g : t \mapsto 1/(\alpha - t)$, on a

$$\frac{1}{n\alpha - 1} + \frac{1}{n\alpha - 2} + \cdots + \frac{1}{n\alpha - n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n\alpha - k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha - k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right)$$

Le cours assure alors que
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(t) dt$$

avec
$$\int_0^1 g(t) dt = [-\ln(\alpha - t)]_0^1 = \ln(\alpha) - \ln(\alpha - 1) = \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$$

Finalement,
$$\boxed{\frac{1}{n\alpha - 1} + \frac{1}{n\alpha - 2} + \cdots + \frac{1}{n\alpha - n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)}$$

(e). Le résultat précédent montre que pour tout réel $\alpha > 0$,

$$f_n(n\alpha) = \frac{a}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha - 1} + \frac{1}{n\alpha - 2} + \cdots + \frac{1}{n\alpha - n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$$

En remplaçant α par $\beta/(\beta - 1)$ avec $\beta > 1$, il vient

$$f_n\left(n \frac{\beta}{\beta - 1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \beta$$

Fixons maintenant $s > 1$ puis $\epsilon > 0$. Notons $s^- = s - \epsilon$ et $s^+ = s + \epsilon$. D'après ce qui précède,

$$f_n\left(n \frac{s^-}{s^- - 1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln s^- \quad \text{et} \quad f_n\left(n \frac{s^+}{s^+ - 1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln s^+$$

En particulier, puisque $\ln s^- < \ln s < \ln s^+$, pour n assez grand

$$f_n\left(n \frac{s^-}{s^- - 1}\right) < \ln s < f_n\left(n \frac{s^+}{s^+ - 1}\right)$$

ce qui par décroissance stricte de f_n assure que pour n assez grand

$$n \frac{s^-}{s^- - 1} > x_n(a, s) > n \frac{s^+}{s^+ - 1} \quad \text{soit encore} \quad \frac{s - \epsilon}{s - \epsilon - 1} < \frac{x_n(a, s)}{n} < \frac{s + \epsilon}{s + \epsilon - 1}$$

Le réel ϵ ayant été pris arbitraire, on en déduit que

$$\boxed{\frac{x_n(a, s)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{s}{s - 1}}$$

6 _____ (**) _____ **X PC 2016**

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x > 0, \quad (f \circ f)(x) + f(x) = 12x$$

Fixons $x > 0$ et définissons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$u_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

En appliquant l'égalité de l'énoncé en $x = u_n$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_{n+1} - 12u_n = 0$$

L'équation caractéristique de cette récurrence est $r^2 + r - 12 = 0$ qui admet pour racines les réels $r_1 = 3$ et $r_2 = -4$. On en déduit donc qu'il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha 3^n + \beta (-4)^n$$

Avec $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ 3\alpha - 4\beta = f(x) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{4x + f(x)}{7} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{3x - f(x)}{7}$$

Notons maintenant que si β est non nul, alors

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta (-4)^n$$

ce qui prouve en particulier que u_n n'est pas de signe constant au voisinage de $+\infty$. C'est absurde car f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ également. Ainsi, $\beta = 0$ d'où $f(x) = 3x$. Le réel x ayant été pris arbitraire,

L'application $f : x \mapsto 3x$ est l'unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall x > 0, \quad (f \circ f)(x) + f(x) = 12x$$

7 _____ (*) _____

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la suite $(\sin(n\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Il est clair que si α est un multiple de π , alors la suite est nulle. On suppose donc que ce n'est pas le cas et alors $\sin \alpha \neq 0$. Pour tout entier n , on note

$$u_n = \cos n\alpha \quad \text{et} \quad v_n = \sin n\alpha$$

On a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \cos \alpha - v_n \sin \alpha & \text{(1)} \\ v_{n+1} = u_n \sin \alpha + v_n \cos \alpha & \text{(2)} \end{cases}$$

La relation (1) prouve puisque $\sin \alpha \neq 0$ que la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implique celle de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La relation (2) prouve la réciproque. Les deux suites sont donc de même nature. Supposons qu'elles convergent. Un passage à la limite donne

$$\begin{cases} \lim u(1 - \cos \alpha) - \lim v \sin \alpha = 0 \\ \lim u \sin \alpha + \lim v(\cos \alpha - 1) = 0 \end{cases}$$

Ce système de deux équations à deux inconnues $(\lim u, \lim v)$ a pour déterminant

$$(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 2 - 2 \cos \alpha \neq 0$$

car $\cos \alpha \neq 1$. Le couple $(0, 0)$ est donc l'unique solution, ce qui est absurde puisque $(\lim u)^2 + (\lim v)^2 = 1$ à nouveau par passage à la limite dans la relation $u_n^2 + v_n^2 = 1$. Pour conclure,

La suite $(\sin(n\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ converge seulement pour α multiple de π .

8 _____ (*) _____ **X PC 2014**

Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $u_n = 1 + 2! + 3! + \dots + n!$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{u_n}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{n(n-1) \dots (n-k)}$$

Or, pour tout $k \geq 2$,
$$\frac{1}{n(n-1) \dots (n-k)} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

et donc
$$0 \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{n(n-1) \dots (n-k)} \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Puisque $1/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il vient $u_n/n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$$

9 _____ (***) _____ **X PC 2014**

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que

$$x_{n+1} + \frac{x_n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, un passage à la limite montre que sa limite ℓ vérifie

$$\ell + \frac{\ell}{2} = 1 \quad \text{d'où} \quad \ell = \frac{2}{3}$$

Montrons donc que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $2/3$. On pose pour cela pour tout entier n ,

$$y_n = x_n - \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad z_n = y_{n+1} + \frac{y_n}{2}$$

Notons que l'hypothèse implique que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, et que l'on souhaite démontrer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour cela, exprimons $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On peut faire apparaître un télescopage en remarquant que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$(-2)^{k+1} \cdot z_k = (-2)^{k+1} \cdot y_{k+1} - (-2)^k \cdot y_k$$

En sommant cette égalité pour k allant de 0 à $n-1$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^{k+1} \cdot z_k = (-2)^n \cdot y_n - y_0$$

soit
$$y_n = \frac{1}{(-2)^n} \left[y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^{k+1} z_k \right]$$

Fixons maintenant $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|z_k| \leq \epsilon/4$ pour tout $k \geq N_0$. Dès lors, pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |y_n| &\leq \frac{1}{2^n} \left[|y_0| + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} |z_k| \right] \\ &\leq \frac{1}{2^n} \left[|y_0| + \sum_{k=0}^{n_0-1} 2^{k+1} |z_k| \right] + \frac{1}{2^n} \sum_{k=n_0}^{n-1} 2^{k+1} \cdot \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, le terme entre crochet est une constante indépendante de n . Divisé par 2^n , on obtient une quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc inférieure à $\epsilon/2$ pour n assez grand. Par ailleurs,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=n_0}^{n-1} 2^{k+1} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1} - 2^{n_0+1}}{2-1} = 2 - 2^{n_0+1-n} \leq 2$$

Finalement, on en déduit qu'à partir d'un certain rang,

$$|y_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

ce qui prouve bien que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. En d'autres termes,

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $2/3$.

10 _____ (**) _____ **X PC 2016**

Construire une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\phi(n) - n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, mais $a_{\phi(n)} - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On peut prendre par exemple

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \ln n$$

puis

$$\phi : n \mapsto n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel x . Il est clair que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas (elle tend vers $+\infty$) et que $\phi(n) - n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. La fonction ϕ est strictement croissante car $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ est croissante (au sens large) mais $x \mapsto x$ est strictement croissante. Enfin,

$$a_{\phi(n)} - a_n = \ln(n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor) - \ln n = \ln \left(1 + \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \right)$$

Compte tenu de la majoration $\lfloor x \rfloor \leq x$, il vient par croissance de $\ln$

$$0 \leq a_{\phi(n)} - a_n \leq \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Finalement,

Les suites définies par $a : n \mapsto \ln n$ et $\phi : n \mapsto n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ conviennent.

11 _____ (*) _____

Nature de la série de terme général $u_n = \ln n \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$?

Un développement asymptotique donne

$$u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right)$$

Une étude de fonction élémentaire prouve que l'application $x \mapsto (\ln x)/\sqrt{x}$ est décroissante à partir d'un certain rang et de limite nulle. Par conséquent, la série $\sum (-1)^n \ln n/\sqrt{n}$ est une série alternée convergente.

Le reste $u_n - (-1)^n \ln n/\sqrt{n}$ est alors équivalent à $-(\ln n)/(2n)$ donc minoré à partir d'un certain rang par $-1/(2n)$. Il s'agit donc du terme général d'une série divergente. Par suite,

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

12

(*)

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ avec $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est strictement positif et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{1+a^{n+1}}$$

On distingue trois cas

- Si $a > 1$, alors u_{n+1}/u_n est de limite nulle donc $\sum u_n$ converge d'après la règle de d'Alembert.
- Si $a = 1$, alors u_{n+1}/u_n est de limite $1/2$ donc à nouveau $\sum u_n$ converge.
- Si maintenant $a < 1$, on ne peut plus conclure par d'Alembert. On peut envisager d'appliquer Raab-Duhamel car $a^{n+1} = o(1/n^p)$ pour tout entier p , d'où par développement limité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left[1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] [1 + O(a^n)] = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Mais ici, on peut justifier directement l'équivalent $u_n \sim Cn^\alpha$ en justifiant que le produit $p_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)$ converge puisque

$$\ln p_n = \sum_{k=1}^n \ln(1+a^k) \quad \text{avec} \quad \ln(1+a^k) \sim a^k \quad (\text{terme général d'une série géométrique convergente})$$

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure que $\ln p_n$ converge, donc que p_n converge vers une limite non nulle. Au final, l'équivalent assure que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

$$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } a \geq 1 \text{ ou } a < 1 \text{ et } \alpha < -1.$$

13

(**)

Nature de la série de terme général $u_n = (1 - n^{-a})^n$ avec $a > 0$?

Commençons par écrire que

$$u_n = e^{n \ln(1-n^{-a})} = \exp(-n^{1-a} + O(n^{1-2a}))$$

On distingue trois cas

- Si $a > 1$, alors le terme dans l'exponentielle est équivalent à n^{1-a} donc tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il s'ensuit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $a = 1$, alors on a de la même manière que u_n tend vers e^{-1} donc il y a à nouveau divergence grossière.
- Si $a < 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle ce qui est insuffisant pour conclure. Mais on a de plus

$$n^2 u_n = \exp(2 \ln n - n^{1-a} + O(n^{1-2a}))$$

Le terme dans l'exponentielle tend toujours vers $-\infty$ par croissances comparées donc $n^2 u_n$ tend vers 0 soit $u_n = o(1/n^2)$. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < 1$.

14 _____ (*) _____ **Mines PC 2010**

Nature de la série de terme général u_n défini par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_n = (-1)^n \frac{\cos(u_{n-1})}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Il est clair que par définition $u_n = O(1/n)$ et donc $u_{n-1} = O(1/n)$. On peut donc effectuer un développement limité de u_n soit

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} (1 + O(u_{n-1}^2)) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Le terme général u_n est donc la somme de deux termes de séries convergentes (critère des séries alternées et convergence absolue) donc

La série $\sum u_n$ converge.

15 _____ (*) _____

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \ln(1 - 1/n^2)$. Montrer que la série de terme général $(u_n)_{n \geq 2}$ converge et calculer sa somme.

La convergence est une conséquence immédiate de l'équivalent $u_n \sim -1/n^2$. Pour calculer la somme, on passe par les sommes partielles et on décompose le logarithme

$$S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln(k^2 - 1) - 2 \ln k = \sum_{k=2}^n \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2 \ln k$$

On peut alors faire apparaître un télescopage de la manière suivante :

$$S_n = \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln k) - \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) = \ln(n+1) - \ln 2 - \ln n + \ln 1$$

Enfin, on écrit pour conclure

$$S_n = -\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln 2$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2$$

16 _____ (***) _____ **X PC 2016**

Pour tout réel x , on note $[x]$ la partie entière de x . Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par récurrence par

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = 2 a_{[n/2]}$$

- (a). Montrer que cette suite est bien définie.
- (b). Montrer que la série de terme général $1/a_n^2$ est convergente et calculer sa somme.

(a). La question est un peu inhabituelle. Il en fait de justifier que la relation de récurrence permet de définir u_n pour tout entier n . On raisonne pour cela par récurrence forte sur n .

- Par définition, a_1 est bien défini et vaut 1.
- Supposons les éléments $u_1, \dots, u_{n-1}$ bien définis pour un certain entier $n \geq 2$. Vérifions que u_n est bien défini. La relation de récurrence donne

$$a_n = 2a_{[n/2]}$$

Or, on a $[n/2] \leq n/2 < n$. Ainsi, $a_{[n/2]}$ est bien défini, ce qui assure que a_n est bien défini.

Par récurrence, on peut donc en déduire que a_n est bien défini pour tout entier n , et donc que

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

(b). Le calcul des premiers termes montre que

$$a_2 = a_3 = 2 \qquad a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 4 \qquad a_8 = a_9 = \dots = a_{15} = 8 \qquad a_{16} = 16$$

ce qui suggère que a_n est la plus grande puissance de 2 qui soit inférieure ou égale à n , soit en d'autres termes

$$a_n = 2^p \quad \text{où } p \text{ est l'unique entier tel que } 2^p \leq n \leq 2^{p+1} - 1$$

Justifions cette propriété par récurrence.

- Par définition, $2^0 \leq 1 \leq 2^1 - 1$ et $a_1 = 2^0$.
- Supposons l'égalité valable jusqu'au rang $n - 1$ pour un certain entier $n \geq 2$. Alors, en particulier,

$$a_{\lfloor n/2 \rfloor} = 2^p \quad \text{où } 2^p \leq \lfloor n/2 \rfloor \leq 2^{p+1} - 1$$

Par définition de la suite, $a_n = 2^{p+1}$ et $2^{p+1} \leq 2\lfloor n/2 \rfloor \leq 2^{p+2} - 2$

Mais par définition de la partie entière,

$$n/2 - 1 < \lfloor n/2 \rfloor \leq n/2 \quad \text{d'où } n - 2 < 2\lfloor n/2 \rfloor \leq n \quad \text{soit } n - 1 \leq 2\lfloor n/2 \rfloor \leq n$$

puisque toutes les quantités sont entières. On en déduit notamment que

$$n \geq 2\lfloor n/2 \rfloor \geq 2^{p+1} \quad \text{et } n \leq 2\lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq (2^{p+2} - 2) + 1 = 2^{p+2} - 1$$

soit bien $a_n = 2^q \quad \text{où } 2^q \leq n \leq 2^{q+1} - 1 \quad \text{avec } q = p + 1$

Par récurrence, on en déduit donc le résultat souhaité :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n , c'est-à-dire que

$$a_n = 2^p \quad \text{où } 2^p \leq n \leq 2^{p+1} - 1$$

Il découle de cette propriété l'encadrement

$$a_n \leq n \leq 2a_n - 1 \quad \text{d'où notamment } a_n \geq \frac{n+1}{2} \quad \text{et } \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{4}{(n+1)^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On peut maintenant conclure par Riemann que

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n^2}$ est convergente.

Paradoxalement, calculer la somme de la série se révèle plus facile que justifier sa convergence! Il suffit pour cela de séparer les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs. Cela permet d'écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{2n}^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{2n+1}^2}$$

Or, pour tout entier $n \geq 1$, on a par définition de la suite $a_{2n} = a_{2n+1} = 2a_n$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^2} + 1 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^2} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^2}$$

et finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^2} = 2$$

17

(**)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$ pour tout entier n .

(a). Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

(b). A l'aide des séries géométriques, retrouver la nature des séries de la forme $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

(a). Notons pour tout entier n

$$x_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k$$

Par décroissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n u_{2^{n+1}} \leq x_n \leq 2^n u_{2^n} \quad \text{soit} \quad \frac{v_{n+1}}{2} \leq x_n \leq v_n$$

Cet encadrement prouve que les séries à termes positifs $\sum x_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Par ailleurs, si l'on considère les sommes partielles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\sum x_n$ et $\sum u_n$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = U_{2^{n+1}-1}$$

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc extraite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Mais la réciproque est vraie puisque les deux suites sont croissantes (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive) ce qui prouve que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, il en est de même de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Finalement,

Les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante positive.

(b). Si $\alpha < 0$, le terme général ne tend pas vers 0, si $\alpha = 0$, il est supérieur à $1/n$ à partir d'un certain rang. Dans les deux cas, la divergence est assurée. Supposons donc $\alpha > 0$. Une étude élémentaire montre que $x \mapsto 1/(x^\alpha (\ln x)^\beta)$ est décroissante à partir d'un certain rang, ce qui va permettre d'appliquer ce qui précède. En notant $u_n = 1/(n^\alpha (\ln n)^\beta)$, on a

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \frac{(2^{1-\alpha})^n}{(\ln 2)^\beta n^\beta}$$

On distingue trois cas

- Si $\alpha < 1$, alors $2^{1-\alpha} > 1$ donc v_n tend vers $+\infty$ par croissance comparées donc $\sum v_n$ et donc $\sum u_n$ diverge.
- Si $\alpha = 1$, le critère de Riemann assure que $\sum v_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.
- Enfin si $\alpha > 1$, on a $2^{1-\alpha} < 1$ donc $v_n = o(1/n^2)$ ce qui assure la convergence de la série $\sum v_n$ et donc celle de $\sum u_n$.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

18

(**)

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, tels que Q n'ait pas de racines dans $\mathbb{N}$. On pose $u_n = P(n)/Q(n)$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Notons p (resp. q) le degré de P (resp. Q) et a_p (resp. b_q) son coefficient dominant. On a alors lorsque n tend vers $+\infty$

$$P(n) = a_p n^p + O(n^{p-1}) \quad \text{et} \quad Q(n) = b_q n^q + O(n^{q-1})$$

de sorte qu'après développement limité

$$u_n = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_p}{b_q} n^{p-q} + O(n^{p-q-1})$$

On en déduit trois cas

- Si $q \leq p$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de limite nulle donc les deux séries divergent grossièrement.
- Si $q \geq p + 2$, alors $u_n = O(1/n^2)$ donc les deux séries convergent absolument.
- Enfin si $q = p + 1$, on a $u_n \sim c/n$ avec $c = a_p/b_q \neq 0$ donc $\sum u_n$ diverge. Par ailleurs, $(-1)^n u_n$ est la somme du terme général d'une série alternée convergente et d'un terme de série absolument convergente donc $\sum (-1)^n u_n$ converge.

19

(**)

Mines PC 2008

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et 1-périodique. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

En effectuant le changement de variable $u = t - n$, il vient par périodicité de f

$$u_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u+n} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{f(u)}{1+u/n} dt$$

La fonction f étant continue sur le segment $[0; 1]$, elle est bornée. Une application immédiate du théorème de convergence dominée donne alors la limite

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{1+u/n} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(u) dt$$

Si cette intégrale est non nulle, on a un équivalent de u_n de la forme c/n avec $c \neq 0$ ce qui prouve la divergence de la série $\sum u_n$.

Supposons maintenant que $\int_0^1 f(t) dt = 0$ et montrons qu'alors la série est convergente. Soit F la primitive de f qui s'annule en 1. Alors pour tout $x \geq 1$,

$$F(x+1) - F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = 0$$

La fonction F est donc 1-périodique donc bornée sur $[1; +\infty[$. Une intégration par parties donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \int_1^n \frac{f(t)}{t} dt = \left[\frac{F(t)}{t} \right]_1^n + \int_1^n \frac{F(t)}{t^2} dt$$

L'intégrale est alors absolument convergente car F est bornée donc convergente, tandis que la quantité $F(n)/n$ converge vers 0. Au final, la somme partielle admet une limite donc la série converge.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

20

(**)

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}^*$ et pour tout entier n , $u_n = \alpha_1 \cdots \alpha_n$.

- (a). Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{C}^*$, alors $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
- (b). Montrer que la réciproque est fautive (chercher un contre-exemple avec $\alpha_n \in \mathbb{R}^{+*}$ pour tout entier n).
- (c). Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite convergente de limite 1. On note $\beta_n = \alpha_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne s'annule jamais et que la série $\sum \beta_n$ est absolument convergente.
 - (i) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et des réels $0 < A \leq B$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $A \leq |u_n| \leq B$.
 - (ii) Montrer que la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{C}^*$.

- (a). Il suffit de remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = u_n/u_{n-1}$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle, le quotient de deux termes consécutifs tend vers 1.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{C}^*$, alors $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

- (b). Il suffit de prendre

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

Le produit $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ est alors télescopique et égale à $n+1$ ce qui prouve que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge bien que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit de limite 1.

- (c). (i) Dans un premier temps, on utilise la majoration $e^x \geq 1+x$ pour tout réel x pour écrire

$$|u_n| = \prod_{i=1}^n |1 + \beta_i| \leq \prod_{i=1}^n (1 + |\beta_i|) \leq \prod_{i=1}^n e^{|\beta_i|} = \exp\left(\sum_{i=1}^n |\beta_i|\right) \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\beta_i|\right)$$

Par ailleurs, la convergence absolue de la série $\sum \beta_n$ prouve que son terme général tend vers 0 donc est strictement inférieur à 1 à partir d'un certain rang n_0 . Dès lors, pour $n \geq n_0$

$$\prod_{i=n_0+1}^n |1 + \beta_i| \geq \prod_{i=n_0+1}^n (1 - |\beta_i|) \geq \prod_{i=1}^n e^{-|\beta_i|} \geq \exp\left(-\sum_{i=n_0+1}^n |\beta_i|\right) \geq \exp\left(-\sum_{i=n_0+1}^{+\infty} |\beta_i|\right)$$

Finalement
$$|u_{n_0}| \exp \left(- \sum_{i=n_0+1}^{+\infty} |\beta_i| \right) \leq |u_n| \leq \exp \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\beta_i| \right)$$

ce qui établit l'encadrement attendu.

(ii) Il suffit de remarquer que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - u_{n-1}| = |(\alpha_n - 1)u_{n-1}| = |\beta_n u_{n-1}| \leq B |\beta_n|$$

Cette majoration prouve la convergence absolue de $\sum u_n - u_{n-1}$ par théorème de comparaison donc sa convergence et donc celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Reste à montrer que sa limite est non nulle, ce qui découle d'un passage à la limite dans la minoration $0 < A \leq |u_n|$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{C}^*$.

21 _____ (**) _____ **CCP PC 2019**

(a). Montrer que
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \cdot b \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$$

Dans toute la suite, $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs. On pose pour tout $k \geq 1$

$$S_k = \sum_{i=1}^k u_i \quad \text{et} \quad V_k = \left(\frac{S_k}{k} \right)^2 - 2 \cdot u_k \cdot \left(\frac{S_k}{k} \right)$$

Enfin, on note $(\star)$ la propriété
$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k} \right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^n u_k^2 \quad (\star)$$

(b). On suppose $(\star)$ vraie pour tout entier $n \geq 1$ et que $\sum_{k \geq 1} u_k^2$ converge. Montrer que $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{S_k}{k} \right)^2$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{S_k}{k} \right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2$$

(c). Soit $k \geq 2$.

(i) Donner une expression de u_k en fonction de S_k et S_{k-1} et en déduire que

$$V_k = (1 - 2k) \left(\frac{S_k}{k} \right)^2 + 2(k-1) \cdot \frac{S_{k-1}}{k-1} \cdot \frac{S_k}{k}$$

(ii) A l'aide de la question (a), montrer que

$$V_k \leq (k-1) \left(\frac{S_{k-1}}{k-1} \right)^2 - k \left(\frac{S_k}{k} \right)^2$$

(iii) Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k} \right)^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n u_k \left(\frac{S_k}{k} \right)$$

(iv) Démontrer l'inégalité $(\star)$ pour tout $n \geq 1$.

(d). Avec $u_k = \frac{1}{k^\alpha}$ où $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ et une comparaison série-intégrale, montrer que le coefficient 4 de l'inégalité $(\star)$ est optimal.

(a). Il suffit d'écrire
$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \quad \text{d'où} \quad 2a \cdot b \leq a^2 + b^2$$

et donc

$$a \cdot b \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$$

(b). Les deux hypothèses permettent d'écrire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k} \right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^n u_k^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{S_k}{k}\right)^2$ sont majorées donc la série converge. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient le résultat.

$$\text{La série } \sum_{k \geq 1} \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2.$$

(c). (i) Par définition de S_k ,

$$\forall k \geq 2, \quad u_k = S_k - S_{k-1}$$

ce qui permet d'écrire que

$$\begin{aligned} V_k &= \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 - 2(S_k - S_{k-1}) \frac{S_k}{k} \\ &= \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 - 2k \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 + 2(k-1) \frac{S_{k-1}}{k-1} \frac{S_k}{k} \end{aligned}$$

soit effectivement

$$V_k = (1-2k) \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 + 2(k-1) \frac{S_{k-1}}{k-1} \frac{S_k}{k}$$

(ii) D'après la question (a),

$$\frac{S_{k-1}}{k-1} \frac{S_k}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{S_{k-1}}{k-1}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{S_k}{k}\right)^2$$

d'où

$$V_k \leq (1-2k) \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 + (k-1) \left(\left(\frac{S_{k-1}}{k-1}\right)^2 + \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 \right)$$

et en rassemblant les termes

$$V_k \leq (k-1) \left(\frac{S_{k-1}}{k-1}\right)^2 - k \left(\frac{S_k}{k}\right)^2$$

(iii) L'inégalité de la question précédente reste valable en prenant par convention $S_0 = 0$ (ou n'importe quelle valeur en fait) puisque $S_1 = u_1$ d'où $V_1 = -S_1^2 = -u_1^2$. En la sommant pour k allant de 1 à n , on obtient par télescopage

$$\sum_{k=1}^n V_k = -n \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 \leq 0$$

Par définition de V_k , cela signifie que

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n u_k \left(\frac{S_k}{k}\right)$$

(iv) L'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $\mathbb{R}^n$ assure que pour tous $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}$$

En appliquant ce résultat avec $x_i = u_i$ et $y_i = S_i/i$, il vient

$$\sum_{k=1}^n u_k \left(\frac{S_k}{k}\right) \leq \left(\sum_{k=1}^n u_k^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k}\right)^2\right)^{1/2}$$

et donc d'après la question précédente

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 \leq 2 \left(\sum_{k=1}^n u_k^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k}\right)^2\right)^{1/2}$$

Si $\sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 = 0$, alors $(\star)$ est vérifiée. Sinon, il suffit de simplifier l'inégalité précédente par $\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k}\right)^2\right)^{1/2}$ puis de l'élever au carré pour conclure.

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^n u_k^2$$

(d).

A FAIRE !

22

(**)

Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série convergente, de somme S . On pose

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k u_k$$

(a). Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(b). Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{v_n}{n+1}$ converge et que sa somme vaut S .

(a). Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 1} u_n$. Par convention, on pose $S_0 = T_0 = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ de sorte que

$$\sum_{k=1}^n k u_k = \sum_{k=1}^n k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) S_k = - \sum_{k=0}^{n-1} S_k + n S_n$$

Ainsi

$$v_n = S_n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc sa moyenne de Césaro est également convergente de même limite. L'égalité ci-dessus prouve aussitôt que

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

(b). Notons $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum v_n/(n+1)$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ celle de $\sum k u_k$. On effectue une nouvelle transformée d'Abel en remarquant que

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) U_n$$

Dès lors

$$T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) U_k = \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{U_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{U_k - U_{k-1}}{k} + \frac{U_n}{n+1}$$

Or, on remarque que $U_k - U_{k-1} = k u_k$ pour tout $k \geq 1$ et $U_n = n v_n$ par définition donc

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + \frac{n}{n+1} v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$$

23

(**)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels et $\alpha > 0$. On suppose que la série $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge. Prouver que

$$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n/n^\alpha$ avec par convention $S_0 = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = n^\alpha (S_n - S_{n-1})$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n^\alpha} &= \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n k^\alpha (S_k - S_{k-1}) \\ &= \frac{1}{n^\alpha} \left[\sum_{k=1}^n k^\alpha S_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^\alpha S_k \right] \\ \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n^\alpha} &= S_n - \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^\alpha - k^\alpha] S_k \end{aligned}$$

On sait que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Il s'agit alors de justifier que la quantité $\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)^\alpha - k^\alpha] S_k$ est convergente de même limite ce qui est le résultat immédiat du lemme de Césaro généralisé suivant :

Si $\sum \lambda_n$ est une série à termes positifs divergente et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ , alors

$$\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

En prenant le terme télescopique $\lambda_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$, on a aussitôt le résultat.

24 _____ (**) _____ **CCP PC 2019**

Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ et $v_n = e^{-\sqrt{n}}$

(a). Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

(b). (i) Calculer pour tout x l'intégrale $\int_0^x u e^{-u} du$.

(ii) Soit $n \geq 1$ et $I_n = \int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$. Montrer que I_n est bien définie et que

$$I_n = 2(1 + \sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}$$

(c). Pour $n \geq 1$, on note $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p$. Montrer que $I_{n+1} \leq R_n \leq I_n$ et donner un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.

(d). Déterminer la nature de la série de terme général u_n .

(e). Soit $T_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$. Montrer que $T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{R_n}{\sqrt{e}}$

(a). Pour tout $n \geq 1$, $n^2 v_n = n^2 e^{-\sqrt{n}} = e^{2 \ln n - \sqrt{n}}$

Or, par croissances comparées $2 \ln n - \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

donc par composition de limites $n^2 v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ soit $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Le critère de Riemann assure alors que

La série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

(b). (i) Par intégration par parties,

$$\int_0^x u e^{-u} du = [-u e^{-u}]_0^x + \int_0^x e^{-u} du = [-u e^{-u} - e^{-u}]_0^x$$

d'où

$$\int_0^x u e^{-u} du = 1 - (x+1)e^{-x}$$

(ii) De la même manière qu'à la question (a), on prouve que

$$e^{-\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui suffit à assurer l'intégrabilité sur $[n; +\infty[$ de $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ et donc que

Pour tout $n \geq 1$, I_n est bien définie.

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$ avec $t \mapsto \sqrt{t}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[n; +\infty[$ dans $[\sqrt{n}; +\infty[$. Il vient alors $t = u^2$ puis $dt = 2u du$ et

$$I_n = 2 \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} u e^{-u} du = [-u e^{-u} - e^{-u}]_{\sqrt{n}}^{+\infty}$$

soit bien

$$I_n = 2(1 + \sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}$$

- (c). Il suffit d'effectuer une comparaison série-intégrale. L'application $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$ donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_p^{p+1} e^{-\sqrt{t}} dt \leq e^{-\sqrt{p}} \leq \int_{p-1}^p e^{-\sqrt{t}} dt$$

En sommant cette égalité de $p = n+1$ à $+\infty$ (les séries convergent d'après les premières questions), on obtient directement le résultat par Chasles.

$$\forall n \geq 1, \quad I_{n+1} \leq R_n \leq I_n$$

D'après 2.(b),

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n} e^{-\sqrt{n}}$$

En particulier, $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_{n+1}$ et par l'encadrement précédent

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n} e^{-\sqrt{n}}$$

- (d). Lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)\right) = e^{-\sqrt{n}} e^{-1/2} e^{O(1/\sqrt{n})}$$

et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{e}} = \frac{v_n}{\sqrt{e}}$$

Sachant que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, par théorème de comparaison de séries à termes positifs

$$\text{La série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge.}$$

- (e). Il s'agit ici d'un cas particulier de sommation des relations de comparaisons. Le résultat n'étant pas au programme de PC, il faut le redémontrer. On a vu à la question (d) que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n/\sqrt{e}$. Fixons $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geq n_0, \quad -\epsilon v_p \leq u_p - \frac{v_p}{\sqrt{e}} \leq \epsilon v_p$$

Soit $n \geq n_0$. En sommant cet encadrement de $n+1$ à $+\infty$, on obtient

$$-\epsilon R_n \leq T_n - \frac{R_n}{\sqrt{e}} \leq \epsilon R_n$$

Pour résumer,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \left| T_n - \frac{R_n}{\sqrt{e}} \right| \leq \epsilon R_n$$

c'est-à-dire que

$$T_n - \frac{R_n}{\sqrt{e}} = o(R_n)$$

et donc

$$T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{R_n}{\sqrt{e}}$$

25

(***)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sqrt{k}$$

- (a). Démontrer l'équivalent $a_n \sim (-1)^{n+1} \sqrt{n}/2$.
 (b). Montrer que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (a_n + a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive.

(c). Etudier la nature de $\sum \frac{1}{a_n}$.

(a) On traite d'abord le cas n pair. On peut alors écrire

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sqrt{k} = \sum_{k=1}^n \sqrt{2k-1} - \sqrt{2k} = \sum_{k=1}^n f(k)$$

avec $f : x \mapsto \sqrt{2x-1} - \sqrt{2x}$. L'application f ainsi définie est négative (évident), croissante (dérivée) et de limite nulle en $+\infty$ (faire un DL). On peut appliquer une comparaison série-intégrale et il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_1^n f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_2^{n+1} f(t) dt \quad (*)$$

Remarquons maintenant que pour tout réel α , on a lorsque x tend vers $+\infty$

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt = \frac{1}{3} [(2x-1)^{3/2} - (2x)^{3/2}]_{\alpha}^x = \frac{1}{3} (2x)^{3/2} \left[\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3/2} - 1 \right] - f(\alpha) = \frac{1}{3} (2x)^{3/2} \left[-\frac{3}{4x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] - f(\alpha)$$

d'où
$$\int_{\alpha}^x f(t) dt \sim -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$$

On en déduit que les deux membres de l'encadrement $(*)$ ont le même équivalent $-\sqrt{n/2}$ d'où

$$a_{2n} \sim -\sqrt{2n}/2$$

Dès lors, on peut écrire

$$a_{2n+1} = \sqrt{2n+1} + a_{2n} = \sqrt{2n+1} - \frac{\sqrt{2n}}{2} + o(\sqrt{n}) \sim \frac{\sqrt{2n+1}}{2}$$

Finalement

$$a_n \sim (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{2}$$

(b) Pour tout entier n , on pose $\mu_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = a_{n+2} - a_n = (-1)^{n+1} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$

On vérifie facilement en la dérivant que l'application $g : x \mapsto \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, un développement limité montre que

$$g(x) = \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = \sqrt{x} \left(\left(1 + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - \left(1 + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right)$$

d'où
$$g(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, $(|\mu_n|)_{n \in \mathbb{N}} = (g(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bien décroissante de limite nulle. Le critère de convergence des séries alternées s'applique et prouve

- que $\sum (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ est convergente, d'où la convergence de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- que chaque reste est du signe de son premier terme soit au rang 0

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \text{ c'est-à-dire } \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n \right) - \lambda_1 \text{ est du signe de } \lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$$

En particulier, $\lim \lambda_n > \lambda_1 = 2 - \sqrt{2} > 0$ soit

$$\boxed{\text{La suite } (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente de limite strictement positive.}}$$

(c) Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les sommes partielles de la série $\sum 1/a_n$. En regroupant les termes deux par deux, on peut écrire

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{2k}} + \frac{1}{a_{2k-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{a_{2k} + a_{2k-1}}{a_{2k} a_{2k-1}}$$

D'après le résultat des deux questions précédentes, en notant ℓ la limite de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a l'équivalent

$$\frac{a_{2k} + a_{2k-1}}{a_{2k}a_{2k-1}} \sim \ell \frac{2(-1)^{2k+1}}{\sqrt{2k+1}} \frac{2(-1)^{2k}}{\sqrt{2k}} \sim -\frac{2\ell}{k}$$

ce qui prouve que cette quantité est négative à partir d'un certain rang. On peut alors appliquer le théorème de comparaison aux séries de Riemann pour conclure que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ puis $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Ainsi,

La série $\sum \frac{1}{a_n}$ est divergente.