I. Le groupe symplectique

1 Tout d'abord, utilisons la formule de calcul par blocs donnée dans l'énoncé :

$$\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \cdot 0_n - \mathrm{I}_n \cdot \mathrm{I}_n & 0_n \cdot (-\mathrm{I}_n) - \mathrm{I}_n \cdot 0_n \\ \mathrm{I}_n \cdot 0_n + 0_n \cdot \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \cdot (-\mathrm{I}_n) + 0_n \cdot 0_n \end{pmatrix}$$

Ainsi,
$$\boxed{\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_n & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix} = -\mathrm{I}_{2n}}$$

Ensuite,
$${}^t\mathrm{J} = {}^t\begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t0_n & {}^t\mathrm{I}_n \\ {}^t(-\mathrm{I}_n) & {}^t0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}$$

d'où
$$\boxed{{}^t\mathrm{J} = -\mathrm{J}}$$

> Attention, lorsque l'on écrit la transposée d'une matrice par blocs, il faut penser à échanger les blocs anti-diagonaux !

Enfin, l'égalité $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}_{2n}$ se réécrit $\mathrm{J} \cdot (-\mathrm{J}) = \mathrm{I}_{2n}$ donc

$$\boxed{\text{J est inversible et } \mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J}.}$$

2 On a $\mathrm{J} \in \mathscr{M}_{2n}$. D'après la question 1, ${}^t\mathrm{J} \cdot \mathrm{J} \cdot \mathrm{J} = -\mathrm{J} \cdot \mathrm{J}^2 = -\mathrm{J} \times (-\mathrm{I}_{2n}) = \mathrm{J}$ d'où

$$\boxed{\mathrm{J} \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a ${}^t\mathrm{K}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\alpha\mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Calculons

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}}^{\mathrm{J}} & \overbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_n \\ -\alpha\mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}}^{\mathrm{K}(\alpha)} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\alpha\mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}}_{{}^t\mathrm{K}(\alpha)} & \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha\mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}}_{{}^t\mathrm{K}(\alpha)\cdot\mathrm{J}} & \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{K}(\alpha) \cdot \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}(\alpha) \end{array}$$

donc
$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{K}(\alpha) \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

3 Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{G}_n$, on a bien $\mathrm{L}_\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{2n}$ puis ${}^t\mathrm{L}_\mathrm{U} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{U} & 0_n \\ 0_n & \mathrm{U}^{-1} \end{pmatrix}$ d'où

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}}^{\mathrm{J}} & \overbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{U} & 0_n \\ 0_n & {}^t\mathrm{U}^{-1} \end{pmatrix}}^{\mathrm{L}_\mathrm{U}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} {}^t\mathrm{U} & 0_n \\ 0_n & \mathrm{U}^{-1} \end{pmatrix}}_{{}^t\mathrm{L}_\mathrm{U}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0_n & -{}^t\mathrm{U} \\ \mathrm{U}^{-1} & 0_n \end{pmatrix}}_{{}^t\mathrm{L}_\mathrm{U}\cdot\mathrm{J}} & \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{L}_\mathrm{U} \cdot \mathrm{J} \cdot \mathrm{L}_\mathrm{U} \end{array}$$

car ${}^t\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{U}^{-1} = {}^t(\mathrm{U}^{-1}\mathrm{U}) = {}^t\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$. Finalement,

$$\boxed{\forall\, \mathrm{U} \in \mathcal{G}_n \qquad \mathrm{L}_\mathrm{U} \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

> La notation ${}^t\mathrm{U}^{-1}$ n'est pas ambiguë car pour toute matrice U inversible, la matrice ${}^t\mathrm{U}$ est inversible et ${}^t(\mathrm{U}^{-1}) = ({}^t\mathrm{U})^{-1}$ d'après le cours.

4 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. Alors ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$. D'après les propriétés du déterminant, on a

$$\det \mathrm{J} = \det({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M}) = \underbrace{\det({}^t\mathrm{M})}_{=\det \mathrm{M}} \times \det \mathrm{J} \times \det \mathrm{M} = \det \mathrm{J} \times (\det \mathrm{M})^2$$

Puisque J est inversible (question 1), $\det \mathrm{J}$ est non nul d'où $(\det \mathrm{M})^2 = 1$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n} \text{ alors } \det \mathrm{M} = \pm 1.}$$

5 Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in (\mathcal{S}p_{2n})^2$. Alors $\mathrm{MN} \in \mathcal{S}p_{2n}$. Calculons

$$\begin{aligned} {}^t(\mathrm{MN})\,\mathrm{J}(\mathrm{MN}) &= {}^t\mathrm{N}({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M})\mathrm{N} \\ &= {}^t\mathrm{N}\,\mathrm{J}\mathrm{N} && (\text{car } \mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}) \\ {}^t(\mathrm{MN})\,\mathrm{J}(\mathrm{MN}) &= \mathrm{J} && (\text{car } \mathrm{N} \in \mathcal{S}p_{2n}) \end{aligned}$$

donc
$$\boxed{\forall\, (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in (\mathcal{S}p_{2n})^2 \qquad \mathrm{MN} \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

6 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. D'après la question 4, M est inversible car de déterminant non nul. Multiplions l'égalité ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$ à gauche par $({}^t\mathrm{M})^{-1}$ et à droite par M^{-1}. Il vient

$$\mathrm{J} = ({}^t\mathrm{M})^{-1}\mathrm{J}\mathrm{M}^{-1} = {}^t(\mathrm{M}^{-1})\,\mathrm{J}\mathrm{M}^{-1}$$

d'où
$$\boxed{\forall\, \mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n} \qquad \mathrm{M} \in \mathcal{G}_{2n} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}^{-1} \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

7 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. D'après la question 6, $\mathrm{M}^{-1} \in \mathcal{S}p_{2n}$ d'où ${}^t(\mathrm{M}^{-1})\,\mathrm{J}\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{J}$. Prenons l'inverse :

$$({}^t\mathrm{M}^{-1} \times \mathrm{J} \times \mathrm{M}^{-1})^{-1} = \mathrm{J}^{-1}$$

Comme $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$ pour toutes matrices $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathcal{G}_{2n}$, on obtient

$$\begin{aligned} (\mathrm{M}^{-1})^{-1} \times \mathrm{J}^{-1} \times ({}^t\mathrm{M}^{-1})^{-1} &= \mathrm{J}^{-1} \\ \mathrm{M} \times (-\mathrm{J}) \times {}^t\mathrm{M} &= -\mathrm{J} \quad (\mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J}, \text{ question 1}) \\ \mathrm{M}\mathrm{J}\,{}^t\mathrm{M} &= \mathrm{J} \end{aligned}$$

soit
$${}^t({}^t\mathrm{M})\,\mathrm{J}\,{}^t\mathrm{M} = \mathrm{J}$$

Ainsi,
$$\boxed{\forall\, \mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n} \qquad {}^t\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

> Si l'on prend la transposée dans ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$, on retombe sur la même égalité. En effet, la transposée échange l'ordre des matrices et elle transforme également M en ${}^t\mathrm{M}$! En prenant l'inverse, on échange l'ordre des matrices sans transformer M en ${}^t\mathrm{M}$, ce qui fait passer ${}^t\mathrm{M}$ du bon côté.

8 On a
$${}^t\mathrm{M} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{A} & {}^t\mathrm{C} \\ {}^t\mathrm{B} & {}^t\mathrm{D} \end{pmatrix}$$

d'où
$${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{A} & {}^t\mathrm{C} \\ {}^t\mathrm{B} & {}^t\mathrm{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{C} & -{}^t\mathrm{A} \\ {}^t\mathrm{D} & -{}^t\mathrm{B} \end{pmatrix}$$

puis
$${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{C} & -{}^t\mathrm{A} \\ {}^t\mathrm{D} & -{}^t\mathrm{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C} & {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} - {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} \\ {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{A} - {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{C} & {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{B} - {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{D} \end{pmatrix}$$

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients, d'où

$$ {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C} = 0_n \\ {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} - {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} = -\mathrm{I}_n \\ {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{A} - {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{C} = \mathrm{I}_n \\ {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{B} - {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{D} = 0_n \end{cases} $$

Comme la transposée est linéaire, remarquons que

$$ {}^t({}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} - {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D}) = {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{C} - {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{A} \quad \text{et} \quad {}^t(-\mathrm{I}_n) = -\mathrm{I}_n $$

Ainsi, les 2[e] et 3[e] conditions sont redondantes. On en déduit que

$$ \boxed{\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n} \iff \begin{cases} {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{A} = {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C} \\ {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} - {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} = \mathrm{I}_n \\ {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{B} = {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{D} \end{cases}} $$

II. Centre de $\mathcal{S}p_{2n}$

9 On a

$$ {}^t\mathrm{I}_{2n}\,\mathrm{J}\,\mathrm{I}_{2n} = \mathrm{J} $$

et

$$ {}^t(-\mathrm{I}_{2n})\,\mathrm{J}(-\mathrm{I}_{2n}) = \mathrm{J} $$

donc

$$ \pm\,\mathrm{I}_{2n} \in \mathcal{S}p_{2n} $$

De plus, I_{2n} et $-\mathrm{I}_{2n}$ commutent avec toute matrice de $\mathscr{M}_{2n}$, d'où

$$ \boxed{\{-\mathrm{I}_{2n}, \mathrm{I}_{2n}\} \subset \mathcal{Z}} $$

10 Remarquons que

$$ {}^t\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_n \\ \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \mathrm{K}(-1) $$

donc ${}^t\mathrm{L} \in \mathcal{S}p_{2n}$ d'après la question 2. D'après la question 7, on a $\mathrm{L} \in \mathcal{S}p_{2n}$. Comme $\mathrm{M} \in \mathcal{Z}$, il vient

$$ \mathrm{LM} = \mathrm{ML} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}\,{}^t\mathrm{L} = {}^t\mathrm{L}\,\mathrm{M} $$

D'une part,

$$ \mathrm{LM} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}+\mathrm{C} & \mathrm{B}+\mathrm{D} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} $$

et

$$ \mathrm{ML} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A}+\mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{C}+\mathrm{D} \end{pmatrix} $$

d'où

$$ \mathrm{LM} = \mathrm{ML} \iff \begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{C} = \mathrm{A} \\ \mathrm{B}+\mathrm{D} = \mathrm{A}+\mathrm{B} \\ \mathrm{C} = \mathrm{C} \\ \mathrm{D} = \mathrm{C}+\mathrm{D} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{C} = 0_n \\ \mathrm{A} = \mathrm{D} \end{cases} $$

D'autre part, $\quad {}^t\mathrm{L}\,\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_n \\ \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{A}+\mathrm{C} & \mathrm{B}+\mathrm{D} \end{pmatrix}$

et $\quad \mathrm{M}\,{}^t\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_n \\ \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}+\mathrm{B} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C}+\mathrm{D} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$

d'où $\quad {}^t\mathrm{L}\,\mathrm{M} = \mathrm{M}\,{}^t\mathrm{L} \iff \begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{A} \\ \mathrm{B} = \mathrm{B} \\ \mathrm{C}+\mathrm{D} = \mathrm{A}+\mathrm{C} \\ \mathrm{D} = \mathrm{B}+\mathrm{D} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{B} = 0_n \\ \mathrm{A} = \mathrm{D} \end{cases}$

Ainsi, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0_n \\ 0_n & \mathrm{A} \end{pmatrix}$. Puisque $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$, il vient d'après l'énoncé et la question 4

$$\det \mathrm{M} = \det \mathrm{A} \times \det \mathrm{A} = \pm 1$$

donc $\det \mathrm{A} \neq 0$ soit A est inversible. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{C} = 0_n \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \mathrm{A} \text{ inversible}}$$

11 D'après la question 3, $\mathrm{L_U} \in \mathcal{S}p_{2n}$ et, comme $\mathrm{M} \in \mathcal{Z}$, on a

$$\mathrm{ML_U} = \mathrm{L_U M} \quad \text{avec} \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0_n \\ 0_n & \mathrm{A} \end{pmatrix} \qquad \text{(question 10)}$$

D'une part, $\quad \mathrm{L_U M} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & 0_n \\ 0_n & {}^t\mathrm{U}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0_n \\ 0_n & \mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{UA} & 0_n \\ 0_n & {}^t\mathrm{U}^{-1}\,\mathrm{A} \end{pmatrix}$

D'autre part, $\quad \mathrm{ML_U} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0_n \\ 0_n & \mathrm{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{U} & 0_n \\ 0_n & {}^t\mathrm{U}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{AU} & 0_n \\ 0_n & \mathrm{A}\,{}^t\mathrm{U}^{-1} \end{pmatrix}$

En considérant le premier bloc dans l'égalité $\mathrm{L_U M} = \mathrm{ML_U}$, on obtient

$$\boxed{\forall\, \mathrm{U} \in \mathcal{G}_n \qquad \mathrm{AU} = \mathrm{UA}}$$

12 Soient $i, j \in [\![1\,; n]\!]$ distincts. Puisque $\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j}$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, on a

$$\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j} \in \mathcal{G}_n$$

donc $\quad \mathrm{A}(\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j}) = (\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{i,j})\mathrm{A} \qquad$ (question 11)

d'où $\quad \mathrm{AE}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{A}$

Notons $\mathrm{M}_{[k,\ell]}$ le coefficient de la k-ième ligne et de la ℓ-ième colonne d'une matrice M. Soit $k \in [\![1\,; n]\!]$. On a

$$(\mathrm{E}_{i,j})_{[k,\ell]} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \text{ ou } \ell \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'une part, $\quad (\mathrm{AE}_{i,j})_{[i,k]} = \sum\limits_{p=1}^{n} \mathrm{A}_{[i,p]} (\mathrm{E}_{i,j})_{[p,k]} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \mathrm{A}_{[i,i]} & \text{si } k = j \end{cases}$

D'autre part, $\quad (\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{A})_{[i,k]} = \sum\limits_{p=1}^{n} (\mathrm{E}_{i,j})_{[i,p]} \mathrm{A}_{[p,k]} = \mathrm{A}_{[j,k]}$

Ainsi, $$\forall k \neq j \qquad \mathrm{A}_{[j,k]} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_{[j,j]} = \mathrm{A}_{[i,i]}$$

Ces égalités valent pour tous i et j distincts donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n$.

> Réciproquement, une matrice scalaire (*ie* multiple de I_n) commute avec n'importe quelle autre matrice. On vient donc de prouver que le centre de $\mathcal{G}_n$ est l'ensemble des matrices scalaires.

Par hypothèse, $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. D'après la question 10, on en déduit que $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{I}_{2n}$. D'après la question 4,

$$\pm 1 = \det \mathrm{M} = \det(\lambda \mathrm{I}_{2n}) = \lambda^{2n} \det \mathrm{I}_{2n} = \lambda^{2n}$$

Comme λ est réel, l'équation $(\lambda^n)^2 = -1$ n'a pas de solution et $\lambda = \pm 1$ sont les deux solutions de l'équation $\lambda^{2n} = 1$ (car $2n$ est pair). Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{A} \in \{-\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_n\}}$$

De surcroît, $\mathrm{M} \in \{-\mathrm{I}_{2n}, \mathrm{I}_{2n}\}$ d'où $\mathcal{Z} \subset \{-\mathrm{I}_{2n}, \mathrm{I}_{2n}\}$ puisque, par hypothèse, M est choisie quelconque dans $\mathcal{Z}$. La question 9 montre l'inclusion réciproque. Finalement,

$$\boxed{\mathcal{Z} = \{-\mathrm{I}_{2n}, \mathrm{I}_{2n}\}}$$

III. Déterminant d'une matrice symplectique

13 Procédons par analyse/synthèse. Analyse : si $\mathrm{Q}, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ existent, alors

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{Q} \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{U} & 0_n \\ \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} + \mathrm{QV} & \mathrm{QW} \\ \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{pmatrix}$$

d'où $$\mathrm{A} = \mathrm{U} + \mathrm{QV} \qquad \mathrm{B} = \mathrm{QW} \qquad \mathrm{C} = \mathrm{V} \qquad \mathrm{D} = \mathrm{W}$$

En substituant W dans B puis Q dans A, on obtient

$$\boxed{\mathrm{V} = \mathrm{C} \qquad \mathrm{W} = \mathrm{D} \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{BD}^{-1} \qquad \mathrm{U} = \mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C}}$$

Synthèse : posons $\mathrm{Q}, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ comme dans l'encadré précédent. Un calcul direct donne

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{BD}^{-1} \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C} & 0_n \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

Conclusion : $$\boxed{\exists\, \mathrm{Q}, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W} \in \mathscr{M}_n \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{Q} \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{U} & 0_n \\ \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}}$$

14 Comme $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$, la 3$^{\mathrm{e}}$ condition de la question 8 impose ${}^t\mathrm{D}\,\mathrm{B} = {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{D}$ d'où, en multipliant à gauche par $({}^t\mathrm{D})^{-1}$ et à droite par D^{-1}, on obtient

$$\mathrm{BD}^{-1} = ({}^t\mathrm{D})^{-1}\,{}^t\mathrm{B} = {}^t(\mathrm{BD}^{-1})$$

donc $$\boxed{\mathrm{BD}^{-1} \text{ est symétrique.}}$$

Par multiplicativité du déterminant, la question 13 et les formules de l'énoncé donnent

$$\begin{aligned}
\det \mathrm{M} &= \det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{BD}^{-1} \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} \mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C} & 0_n \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \\
&= \det \mathrm{I}_n \times \det \mathrm{I}_n \times \det (\mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C}) \times \det \mathrm{D} \\
&= \det ({}^t\mathrm{A} - {}^t\mathrm{C}\, {}^t(\mathrm{BD}^{-1})) \times \det \mathrm{D} && \text{(transposée)} \\
&= \det ({}^t\mathrm{A} - {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{BD}^{-1}) \times \det \mathrm{D} && (\mathrm{BD}^{-1} \text{ est symétrique}) \\
&= \det [({}^t\mathrm{A} - {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{BD}^{-1})\mathrm{D}] \\
\det \mathrm{M} &= \det ({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} - {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B})
\end{aligned}$$

Or ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} - {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$ d'après la question 8, d'où

$$\boxed{\det \mathrm{M} = 1}$$

15 Calculons
$$\begin{aligned}
(\mathrm{QV}_1 \mid \mathrm{QV}_2) &= {}^t(\mathrm{QV}_1)\,\mathrm{QV}_2 \\
&= {}^t(s_1\mathrm{PV}_1)\,\mathrm{QV}_2 \\
(\mathrm{QV}_1 \mid \mathrm{QV}_2) &= s_1\,{}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{PQV}_2
\end{aligned}$$

En échangeant les rôles des indices 1 et 2, on obtient

$$(\mathrm{QV}_2 \mid \mathrm{QV}_1) = s_2\,{}^t\mathrm{V}_2\,{}^t\mathrm{PQV}_1$$

Par symétrie du produit scalaire, on en déduit que

$$s_1\,{}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{PQV}_2 = s_2\,{}^t\mathrm{V}_2\,{}^t\mathrm{PQV}_1$$

Puisque le membre de droite est un scalaire, il est égal à sa transposée, d'où

$$\begin{aligned}
s_1\,{}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{P}\,\mathrm{QV}_2 &= {}^t(s_2\,{}^t\mathrm{V}_2\,{}^t\mathrm{PQV}_1) \\
&= s_2\,{}^t\mathrm{V}_1\,{}^t({}^t\mathrm{P}\,\mathrm{Q})\mathrm{V}_2 \\
s_1\,{}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{P}\,\mathrm{QV}_2 &= s_2\,{}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{P}\,\mathrm{QV}_2 && ({}^t\mathrm{P}\,\mathrm{Q} \text{ est symétrique})
\end{aligned}$$

Comme $s_1 \neq s_2$ on a ${}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{PQV}_2 = 0$, puis $s_1\,{}^t\mathrm{V}_1\,{}^t\mathrm{PQV}_2 = 0$. Finalement,

$$\boxed{(\mathrm{QV}_1 \mid \mathrm{QV}_2) = 0}$$

> Les hypothèses V_1 et V_2 non nuls et Q non inversible données par l'énoncé sont inutiles pour résoudre cette question.

16 Comme $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$, on a ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} - {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$ d'après la question 8. Dès lors, si $\mathrm{V} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{B} \cap \mathrm{Ker}\ \mathrm{D}$, alors

$$\mathrm{V} = ({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} - {}^t\mathrm{C}\mathrm{B})\mathrm{V} = {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{DV} - {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{BV} = 0 - 0 = 0$$

ce qui prouve que $\mathrm{Ker}\ \mathrm{B} \cap \mathrm{Ker}\ \mathrm{D} \subset \{0\}$. Réciproquement, Ker B et Ker D sont des sous-espaces vectoriels, ils contiennent donc bien 0. Par suite,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ \mathrm{B} \cap \mathrm{Ker}\ \mathrm{D} = \{0\}}$$

17 Soit $i \in [\![1\,;m]\!]$. Supposons par l'absurde que $\mathrm{DV}_i = 0$. Alors $s_i\mathrm{BV}_i = 0$ et puisque $s_i \neq 0$ on a $\mathrm{BV}_i = 0$. D'après la question 16, ceci entraîne que $\mathrm{V}_i = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;m]\!] \qquad \mathrm{DV}_i \neq 0}$$

Comme $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$, ${}^t\mathrm{BD}$ est symétrique d'après la question 8. La question 15 assure que les vecteurs DV_i sont deux à deux orthogonaux. Puisqu'ils sont non nuls,

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{DV}_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \text{ est libre.}}$$

18 Raisonnons par l'absurde. Supposons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{D} - \alpha\mathrm{B}$ soit non inversible. Alors il existe V_α un vecteur non nul de $\mathcal{E}_n$ tel que

$$(\mathrm{D} - \alpha\mathrm{B})\mathrm{V}_\alpha = 0$$

Choisissons de la sorte $(n+1)$ réels $\alpha_1 < \cdots < \alpha_{n+1}$. D'après la question 17 (la condition $m \leqslant n$ n'intervient pas dans la démonstration), la famille $(\mathrm{DV}_{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ est libre. Or toute famille libre de $\mathcal{E}_n$ de dimension n est de cardinal inférieur à n donc $\mathrm{Card}\,(\mathrm{DV}_{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n+1} = n+1 \leqslant n$, c'est absurde.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \alpha \text{ tel que } \mathrm{D} - \alpha\mathrm{B} \text{ soit inversible.}}$$

19 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. D'après les questions 2 et 5, $\mathrm{K}(\alpha)\cdot\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$ avec

$$\mathrm{K}(\alpha)\cdot\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_n \\ -\alpha\mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} - \alpha\mathrm{A} & \mathrm{D} - \alpha\mathrm{B} \end{pmatrix}$$

Or $\mathrm{D} - \alpha\mathrm{B}$ est inversible (question 18) donc, d'après la question 14,

$$\det\mathrm{K}(\alpha) \times \det\mathrm{M} = \det\left(\mathrm{K}(\alpha)\cdot\mathrm{M}\right) = \det\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} - \alpha\mathrm{A} & \mathrm{D} - \alpha\mathrm{B} \end{pmatrix} = 1$$

Comme $\det\mathrm{K}(\alpha) = 1$, on en déduit que

$$\boxed{\forall\,\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n} \quad \det\mathrm{M} = 1}$$