

11 ▷ En déduire la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}.$$

On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de nombres réels strictement supérieurs à -1 , convergente de limite nulle.

12 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0.$$

13 ▷ En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \cdot \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1 \right) = 0.$$

2 Une étude de marche aléatoire

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n : \Omega \rightarrow \{-1, 1\})_{n \in \mathbf{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{-1, 1\}$, ces variables aléatoires étant mutuellement indépendantes et centrées. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

14 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire $\frac{1+X_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Dans la suite, on fixe l'entier $n \geq 1$. On appelle chemin, tout $2n$ -uplet $\gamma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ dont les composantes ε_k valent -1 ou 1 .

Si $\gamma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ est un chemin, on appelle indice d'égalité, tout entier $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ tel que $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 0$. On remarquera alors qu'un entier k est un indice d'égalité si et seulement si le k -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ comporte autant de composantes égales à 1 que de composantes égales à -1 .

On note $N_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ la variable aléatoire qui à tout élément ω de l'univers Ω compte le nombre d'indices d'égalité du chemin $(X_1(\omega), \dots, X_{2n}(\omega))$.

On note pour tout entier i entre 1 et n , l'événement A_i défini par

$$A_i = \left\{ \omega, 2i \text{ est un indice d'égalité de } (X_1(\omega), \dots, X_{2n}(\omega)) \right\}.$$

15 ▷ Calculer la probabilité $\mathbf{P}(A_i)$, pour tout entier i entre 1 et n .

16 ▷ Soit $\ell \in \mathbf{Z}$ un entier et $n \geq 1$ un autre entier. En distinguant le cas où l'entier $\ell - n$ est pair ou impair, calculer $\mathbf{P}(S_n = \ell)$.

On admet sans démonstration le résultat suivant :

Théorème 1 Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ deux suites de nombres réels non nuls telles que $a_n = o(b_n)$ au voisinage de $+\infty$ et la série $\sum_n |b_n|$ est divergente. Alors :

$$\sum_{k=1}^n a_k = o\left(\sum_{k=1}^n |b_k|\right) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

17 ▷ Soit $(c_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(d_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que : $c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} d_n$ et la série $\sum_n c_n$ diverge.

En utilisant le résultat admis dans l'énoncé, montrer que la série $\sum_n d_n$ est divergente et que :

$$\sum_{k=1}^n c_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n d_k.$$

18 ▷ Montrer que la variable aléatoire N_n admet une espérance finie et que son espérance $\mathbb{E}(N_n)$ est égale à :

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}.$$

[indication : on pourra exprimer la variable N_n à l'aide de fonctions indicatrices associées aux événements A_i .]

19 ▷ En déduire l'équivalent :

$$\mathbb{E}(N_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}.$$

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on procède à des tirages de boules sans remise, jusqu'à vider complètement l'urne. Les tirages sont équiprobables à chaque pioche.

Pour tout entier k entre 1 et $2n$, on dit que l'entier k est un indice d'égalité si dans l'expérience de pioche précédemment décrite, il reste autant de boules noires que de boules blanches dans l'urne après avoir pioché les k premières boules sans remise. On remarque que l'entier $2n$ est toujours un indice d'égalité.

On note M_n , la variable aléatoire comptant le nombre aléatoire d'indices d'égalité k entre 1 et $2n$.

- 20** ▷ En utilisant par exemple les événements B_i : « l'entier i est un indice d'égalité », montrer que la variable M_n admet une espérance finie égale à :

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i} \cdot \binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}}.$$

- 21** ▷ En déduire l'équivalent :

$$\mathbb{E}(M_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}.$$

FIN DU PROBLÈME