1 ——— $(*)$ ———

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}$$

Montrer que F a une limite en $(0,0)$ et la déterminer.

2 ——— $(*)$ ———

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f et l'existence de ses dérivées partielles d'ordre 1. Déterminer ensuite le plus grand ouvert Ω sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.

3 ——— $(*)$ ———

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer la dérivée des fonctions

$$a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x,x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad b : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F\big(x, F(x,x)\big) \end{array}$$

Déterminer ensuite les dérivées partielles des fonctions

$$c : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & F(y,x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad d : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & F\big(y, F(x,x)\big) \end{array}$$

4 ——— $(**)$ ———

(a). Déterminer l'ensemble Ω des complexes z pour lesquels la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolument. On note alors $S(z)$ la somme de cette série.

(b). Soit z_0 un élément de Ω. Montrer que la série précédente converge normalement sur l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,(z) \geq \mathrm{Re}\,(z_0)\}$$

puis que $z \longmapsto S(z)$ est continue sur Ω.

(c). Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on note $\quad \Phi(x,y) = S(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

(d) Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique, c'est-à-dire que le Laplacien $\Delta\Phi$ est nul.

5 ——— $(*)$ ———

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et α un réel. On définit $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0, \qquad \varphi(x,y) = f\,(xy^\alpha)$$

(a). Déterminer une équation aux dérivées partielles simple (**E**) satisfaite par φ.

(b). Réciproquement, toute fonction solution de l'équation (**E**) est-elle nécessairement de la même forme que φ ?

6 ——— $(*)$ ———

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante d'inconnue $f :]0;+\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à l'aide d'un passage en coordonnées polaires,

$$(E) : \quad -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = x + y + f$$

7 ——— (∗∗) ——— **X PC 2010**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\Delta f = 0$. On pose pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$K(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que K est constante.

8 ——— (∗∗) ———

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0,0) = 0$. On suppose que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|$$

On note $u : x \longmapsto f(x,x)$, $v : x \longmapsto f(x,-x)$ et pour tout x, $w_x : y \longmapsto f(x,y)$.

(a) Déterminer les dérivées de u, v et w_x.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un unique $y_x \in \mathbb{R}$ tel que $|y_x| < |x|$ et $f(x, y_x) = 0$.

9 ——— (∗∗) ———

Soit f définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $\qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - (y-x)^2$

(a). Etudier l'existence d'extremums locaux pour cette fonction.

(b). Etudier l'existence d'extremums globaux à la restriction de f à la boule fermée de centre O et de rayon 2.

(c). Quel est l'image de $\mathbb{R}^2$ par f ?

10 ——— (∗∗) ———

Etudier les extremums sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de $\qquad f : (x,y) \longmapsto 2\ln x + 2\ln y - 2x - 4xy$

Que peut-on dire des bornes supérieures et inférieures de f sur son domaine de définition ?

11 ——— (∗∗) ——— **Mines PC 2012**

Soit ABC un triangle du plan euclidien et M un point intérieur au triangle. On note A', B', C' les projetés orthogonaux de M sur respectivement $(BC), (AC)$ et (AB). Déterminer la position du point M pour que le produit des longueurs $A'M, B'M$ et $C'M$ soit maximum et la valeur de ce maximum.

12 ——— (∗∗) ——— **Centrale PC 2013**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (\star)$$

On suppose dans un premier temps que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer qu'il existe $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x) \cdot f(x,y)$$

(b) En déduire qu'il existe g et h dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$$

On considère maintenant $\qquad f : (x,y) \longmapsto (xy)^3 + |xy|^3$

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et solution de $(\star)$.

(d) Montrer que f ne peut s'écrire sous la forme $f : (x,y) \longmapsto g(x)h(y)$ avec $g, h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

13 ——— (∗∗) ——— **Centrale PC 2013**

Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

(a) Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : x \longmapsto (a|x)$. Déterminer le gradient de φ en tout point de $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x) \xrightarrow[||x|| \to \infty]{} +\infty$. Montrer que f possède un minimum global.

(c) Soit $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x)/\,||x|| \xrightarrow[||x|| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que ∇f est surjective.

14 ——— (∗∗) ——— **X PC 2013**

Soit $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la restriction de f à toute boule de $\mathbb{R}^n$ est lipschitzienne.

$\boxed{1}$ Utiliser un développement limité à l'ordre 1 de f en 0.

$\boxed{2}$ Pour l'étude en $(0,0)$, utiliser les majorations $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

$\boxed{3}$ Ecrire les fonctions a, b, c et d comme des composées de fonctions et utiliser la règle de la chaîne.

$\boxed{4}$ (b) Rechercher la convergence normale.

(c) Utiliser les théorèmes de dérivation des séries de fonctions pour l'existence et la continuité des dérivées partielles (le raisonnement diffère pour l'existence et la continuité).

$\boxed{5}$ (b) Faire un changement de variable, inspiré par le sens direct.

$\boxed{6}$ Introduire $g : (r, \theta) \longmapsto f(r \cos\theta, r \sin\theta)$, calculer l'une de ses dérivées partielles d'ordre 1 (la bonne), et utiliser l'équation (E).

$\boxed{7}$ Utiliser l'expression du laplacien en coordonnées polaires et le théorème de dérivation sous le signe intégral pour obtenir une équation différentielle simple vérifiée par f. Résoudre cette équation puis conclure avec un argument de continuité.

$\boxed{8}$ (a) Utiliser la règle de la chaîne.

(b) Etudier les monotonies de u, v et utiliser le théorème des valeurs intermédiaire pour la fonction w_x sur $[-x; x]$.

$\boxed{9}$ (c) On pourra étudier les valeurs de f prises sur le cercle de centre $O = (0,0)$ et de rayon r puis faire varier r afin de balayer totalement $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{10}$ Etudier les variations de la fonction sur des demi-droites horizontales.

$\boxed{11}$ En considérant l'aire des rectangles, trouver une relation entre les trois longueurs de manière à se ramener à la maximisation d'une fonction de deux variables $A'M$ et $B'M$.

Interpréter ensuite géométriquement les valeurs en lesquelles le maximum est atteint.

$\boxed{12}$ (a) Il s'agit tout simplement de vérifier que le quotient $\dfrac{\partial f}{\partial x}/f$ ne dépend pas de y.

(b) Travaillez à y fixé, et reconnaître une équation différentielle du premier ordre dans le résultat précédent.

(d) Raisonner par l'absurde en remarquant que f s'annule sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$, mais pas sur $(\mathbb{R}_+)^2$, ni $(\mathbb{R}_-)^2$.

$\boxed{13}$ (a) Vérifier que $\nabla\varphi$ est constant égal à a.

(b) Ramener la recherche du minimum de f à une recherche sur un fermé borné.

(c) Considérer $a \in \mathbb{R}^n$ arbitraire et $g : x \longmapsto f(x) - (a|x)$. Utiliser alors les deux questions précédentes.

$\boxed{14}$ On rappelle qu'on peut choisir n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$ dans cet exercice. Fixer une boule arbitraire de $\mathbb{R}^n$, deux points arbitraires a et b dans cette boule et introduire

$$\varphi : \begin{array}{rcl} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t\,a + (1-t)\,b) \end{array}$$

Utiliser ensuite le fait que toute fonction continue sur un fermé borné est bornée.