Suites et séries de fonctions intégrables

1 (∗)

Etudier la convergence quand $n \to +\infty$ et la limite éventuelle de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x/n)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

2 (∗)

Etudier la convergence quand $n \to +\infty$ et la limite éventuelle de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

3 (∗∗)

Etudier la convergence quand $n \to +\infty$ et la limite éventuelle de l'intégrale
$$\int_0^{n} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x\,\mathrm{d}x$$

4 (∗∗)

Soit $a > 0$. Etudier l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$.

5 (∗)

Pour tout entier n, on pose
$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{-x}}{1+x^n} \end{array}$$

(a). Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b). A-t-on $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?

6 (∗∗∗)

(a). Justifier l'existence et donner la valeur pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

(b). Justifier l'égalité
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$
On prouvera l'existence de l'intégrale uniquement (pas la convergence de la suite).

7 (∗) **PC X 2008**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0)=0$, $f'(0)=1$ et $f(x) \geq x$ pour tout x. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2 f(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

8 (∗∗)

On admet la version suivante du théorème de Fubini : si I et J sont deux segments de $\mathbb{R}$ et si $f : J\times I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors
$$\int_I\left(\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_J\left(\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
Soit $f : [a;b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in [a;b]\,,\quad \forall t\in\mathbb{R},\qquad |f(x,t)| \leq g(t)$$
Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $F(t) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ et pour tout $x\in[a;b]$, on pose $H(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

(a). Montrer que F est continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ et que H est continue sur $[a;b]$.

(b). Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b H(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra considérer $\displaystyle\int_a^b H_n(x)\,\mathrm{d}x$ avec $H_n(x) = \displaystyle\int_{-n}^{n} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

9 (∗∗) **Mines PC 2013**

On pose pour tout entier $n \geq 3$,
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^n + x^{-n}}}$$
Justifier l'existence de I_n pour $n \geq 3$ et déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis un équivalent simple de I_n.

10 (∗) **PC Mines 2009**

Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{ch}x}\,\mathrm{d}x$ converge, puis que $I = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

11 (∗) **CCP PC 2011**

(a) Convergence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

(b) Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1 - e^{-\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t$.

Intégrales à paramètres

12 (∗∗)

Soit f définie par
$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$$
Donner le domaine de définition de f et étudier sa monotonie, puis déterminer ses limites en $(-1)^+$ et $+\infty$.

13 (∗∗)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit
$$u(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \sin(tx)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

(a). Montrer que u et v sont définies sur $\mathbb{R}$.

(b). En introduisant $z = u + iv$, déterminer une équation différentielle vérifiée par z. En déduire une expression de z, puis de u et v. On pourra utiliser l'égalité
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$$

14 (∗)

Etudier la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

15 (∗∗)

Soit f définie par
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a). Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f. Que dire de la limite de f en $+\infty$?

(b). Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

(c). Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$, l'intégrande étant prolongée par continuité en 1.

16 (∗∗) **Centrale PC 2012**

(a) L'application $\theta \longmapsto \ln(1 - \sin^2\theta)$ est-elle intégrable sur $[0; \pi/2[$?

(b) On note
$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
Montrer que F est continue sur $[-1; +\infty[$.

(c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1; +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

(d) Exprimer $F'(x)$ sans intégrale. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour tout $x \geq -1$.

17 (∗∗)

Soient f et g définies pour tout réel x respectivement par

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a). Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) + g'(x) = 0$ pour tout réel x.

(b). Prouver que $g \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

18 (∗∗) **Mines PC 2013**

Soit f définie par
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

Après l'étude classique de f (domaine de définition, continuité, dérivabilité), déterminer des équivalents simples de cette fonction en 0^+ et en $+\infty$.

19 (∗∗)

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(a). Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale impropre $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge. On pourra introduire la primitive F de f qui s'annule en 0 et effectuer une intégration par parties.

(b). Justifier la limite $T(f)(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} I$.

2 On pourra utiliser l'inégalité $|\sin u| \leq |u|$ valable pour tout réel u.

3 Utiliser le théorème de convergence dominée à une suite de fonctions bien choisies définies sur $\mathbb{R}_+$ (et surtout pas $[0; n]$).

4 Distinguer les deux cas $a \geq 1$ et $a < 1$. Pour le premier cas, utiliser le théorème de convergence dominée. Pour le second, effectuer une minoration de I_n.

5 Pour la convergence simple, on distinguera les cas $x \in [0; 1[$, $x = 1$ et $x > 1$.

6 (a) Intégrer sur un intervalle de la forme $[\epsilon; +\infty[$ pour séparer les intégrales et faire un changement de variable.

(b) Ecrire $e^{-x}\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}} - \dfrac{1}{x}\right)$ comme somme d'une série de fonctions et justifier l'interversion somme-intégrale.

7 Effectuer un changement de variable avant d'appliquer le théorème de convergence dominée.

8 (b) Appliquer le théorème de convergence dominée avec la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9 Appliquer le théorème distinguant le cas $x < 1$ et $x > 1$ pour la limite simple, et des majorations différentes sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

10 Appliquer le théorème d'intégration terme à terme en développant $1/\mathrm{ch}$ sous la forme d'une série de fonctions.

11 (b) Effectuer un changement de variable simple puis utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

12 Pour la monotonie, comparer $(\sin t)^x$ et $(\sin t)^y$ pour $x > y$. Pour la limite en $+\infty$, utiliser le théorème de convergence dominée. Enfin pour la limite en $(-1)^+$, minorer $(\sin t)^x$ pour $x < 0$.

13 Justifier que I est dérivable et déterminer une expression simple de I'.

14 Justifier l'existence de la dérivée seconde de cette fonction et donner en une expression simple.

15 (b) Utiliser une domination sur tout segment de $]0; +\infty[$. Pour le calcul de f', effectuer un changement de variable dans l'intégrale donnant f'.

16 (a) Déterminer un équivalent de $\ln(1 - \sin^2\theta)$ lorsque θ tend vers $\pi/2$. On pourra poser $u = \pi/2 - \theta$.

(b) Utiliser le théorème de continuité avec domination locale à l'aide d'une majoration propre de $u \longmapsto |\ln(1+u)|$ sur un segment $[\alpha; \beta]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Utiliser le théorème de dérivation avec domination locale.

(d) Pour le calcul de $F'(x)$, effectuer le changement de variable $u = \tan\theta$, puis une décomposition en éléments simples. Une fois l'expression de $F'(x)$ sans intégrale obtenue, on pourra chercher sa primitive à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x+1}$.

17 (a) Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ à l'aide du théorème de dérivation avec domination locale.

(b) Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité et le théorème de convergence dominée.

18 Pour un équivalent en 0, faire un changement de variable suivi d'une intégration par parties. Pour un équivalent en $+\infty$, étudier $xf(x)$.

19 (a) Utiliser après l'avoir justifié le fait que F est bornée.

(b) Appliquer le théorème de convergence dominée.