

1 _____ (*) _____

Donner le rayon de convergence et le domaine de convergence de la série $\sum \tan(n\pi/7) z^n$.

2 _____ (*) _____

Donner le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où pour tout n , $a_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

3 _____ (**) _____

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul.

(a). Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$. On note alors $g(z)$ la somme de cette série.

(b). Montrer que pour tout $|z| < R$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \int_0^{+\infty} e^{-t} g(tz) dt$$

4 _____ (**) _____

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

(a). Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $r > 0$

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt$$

(b). En déduire que si f est bornée dans $\mathbb{C}$, alors elle est constante. Que dire de f lorsque $|f(z)| = O(|z|^\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

5 _____ (***) _____

Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{1/x^2} \int_0^x e^{-1/t^2} dt$ (prolongée par continuité par 0 en 0) n'admet pas de développement en série entière en 0, mais possède un DL à tout ordre en 0.

6 _____ (**) _____

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 et $f : x \mapsto e^{P(x)}$. Montrer que le développement en série entière de f ne peut pas contenir deux coefficients successifs nuls.

7 _____ (*) _____

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k x^n}{n!}$$

(a). Justifier que $S_k(x)$ converge quel que soit le réel x .

(b). Prouver qu'il existe un polynôme P_k de degré k tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_k(x) = P_k(x) e^x$$

(c). On suppose $k = 2$. Déterminer P_2 .

8 _____ (*) _____

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+3} = 2a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

Donner le rayon de convergence et la somme de la série $\sum a_n z^n$.

9 _____ (**) _____

Donner le rayon de convergence et la somme des séries suivantes pour $x \in \mathbb{R}$

$$(a) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{ch} n}{n} x^n \quad (b) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^n \quad (c) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + 2n}{n!} x^n \quad (d) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+2} x^{3n+2}$$

On admettra que $\int \frac{t dt}{1+t^3} = \frac{1}{6} \ln(t^2 - t + 1) - \frac{1}{3} \ln(t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$.

10 _____ (**) _____

Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes :

$$(a) \quad \ln(x^2 - 5x + 6) \quad (b) \quad \operatorname{sh} x \sin x \quad (c) \quad \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \quad (d) \quad \int_0^1 \frac{dt}{1+xt \ln t}$$

11 _____ (**) _____

Soit f définie pour tout $x \in]-4; 4[$ par
$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{xt^2 - xt + 1}$$

Donner le développement en série entière de f . On pourra commencer par justifier pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ l'égalité

$$\int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$$

12 _____ (**) _____

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$$

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Calculer $f(x)^2$ et en déduire une expression de a_n en fonction de n .

13 _____ (**) _____

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de réels définie par récurrence par

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

- Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- En déduire que le rayon de convergence de la série $\sum \frac{a_n x^n}{n!}$ est supérieur ou égal à 1.
- Montrer que la somme de cette série est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- En déduire une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \in]-1; 1[$, puis de a_n pour tout entier n .

14 _____ (**) _____

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x/2)$$

- Montrer qu'un élément f de E est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = a_n f(x/2^n)$$

- Déterminer la rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n / n!$.

- On pose pour tout $x \in]-R; R[$
$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

Montrer que g est l'unique élément de E .

15 _____ (**) _____ **PC X 2011**

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On fait les hypothèses suivantes :

- Le quotient a_n/b_n admet une limite $c \in \mathbb{C}^*$.
- La série $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ a également un rayon de convergence égal à 1, puis que

$$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} c$$

En déduire un équivalent lorsque x tend vers 1^- de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n$. On pourra étudier $(1-x)g(x)$.

- 1** Vérifier que la suite $(\tan(n\pi/7))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et divergente.
- 2** Encadrer a_n à l'aide d'un changement de variable.
- 3** (a) Reprendre une démonstration similaire à celle du lemme d'Abel.
(b) Utiliser une intégration terme à terme.
- 4** Justifier la convergence normale de la série de fonction $\sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{int}$.
- 5** Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et solution d'une équation différentielle dont on déterminera les solutions développables en série entière.
Pour montrer que f a un DL à tout ordre, effectuer des intégrations par parties successives.
- 6** Raisonner par l'absurde. Utiliser une équation différentielle satisfaite par f puis introduire le plus petit entier p tel que les coefficients d'indices p et $p+1$ du développement en série sont nuls.
- 7** (b) Utiliser la base $(X(X-1) \cdots (X-k+1))_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$.
- 8** Pour calculer la somme de la série, multiplier la relation de récurrence par x^{n+3} puis sommer pour n allant de 0 à $+\infty$.
On pourra commencer ce travail en admettant en premier lieu que le rayon de convergence R est > 0 , et que $x \in]-R; R[$.
- 9** (a) Utiliser le développement en série entière de $x \mapsto -\ln(1-x)$.
(b) On pourra écrire que $n = \frac{1}{2}[(2n+1) - 1]$ puis séparer les sommes et utiliser les développements en série entière de $\cosh$ et $\sinh$ (pour $x > 0$) et de $\cos$ et $\sin$ (pour $x < 0$).
(c) Utiliser la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
(d) Calculer la somme de la série dérivée.
- 10** (a) Factoriser l'argument du logarithme.
(b) Utiliser le développement en série entière de quatre exponentielles.
(c) Utiliser une équation différentielle.
(d) Utiliser un théorème d'intégration terme à terme.
- 11** Utiliser une interversion série intégrale. On pourra vérifier que pour tout $t \in [0; 1]$, $xt^2 - xt \in [0; x/4]$.
- 12** Etablir une équation du second degré satisfaite par $f(x)$. Justifier que l'une des solutions est la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ sur un voisinage de 0 et en déduire a_n à l'aide d'un développement limité.
- 13** (a) On pourra comparer a_n à $n!$.
(b) Utiliser la dérivation terme à terme.
(c) Utiliser le produit de deux séries entières absolument convergentes. L'expression attendue comporte une somme.
- 14** (c) Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour montrer que si $f \in E$, alors f admet un développement en série entière.
- 15** Travailler avec des ϵ et utiliser des méthodes similaires à la preuve du théorème de Césaro.