IV Théorème de Perron-Frobenius pour une classe de matrices symétriques positives

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive (c'est-à-dire à coefficients positifs ou nuls). On pose $r = \rho(A)$.

IV.A –

Q 21. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire des sous-espaces propres de A ?

Q 22. Montrer que $r > 0$.

On note μ la plus grande valeur propre de A.

Q 23. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, unitaire pour la norme euclidienne canonique,

$$X^\top AX \leqslant \mu.$$

On pourra faire le calcul dans une base orthonormée convenablement choisie.

Q 24. Montrer que cette inégalité est une égalité si, et seulement si, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

Q 25. Montrer que, pour tout vecteur unitaire X,

$$|X^\top AX| \leqslant |X|^\top A|X| \leqslant \mu.$$

Q 26. En déduire que, pour toute valeur propre λ de A, on a $|\lambda| \leqslant \mu$, et que $\mu = r$.

IV.B –

Dans cette sous-partie uniquement, on suppose en outre que A est strictement positive.

Q 27. Montrer que, si X est un vecteur propre de A, unitaire, associé à la valeur propre r, alors $|X|$ est un vecteur propre de A, unitaire, associé à la valeur propre r, et que $|X| > 0$.

Q 28. Montrer que $X = |X|$ ou $X = -|X|$.

Q 29. Montrer que le sous-espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1.

On pourra raisonner par l'absurde en considérant deux vecteurs propres de A orthogonaux associés à r.

Q 30. Montrer que la multiplicité de r, en tant que valeur propre, vaut 1 et en déduire que $-r$ n'est pas valeur propre de A.

Ainsi, r est l'unique valeur propre de A de module égal à r.

Q 31. Montrer que cette propriété n'est pas forcément vérifiée si A est seulement supposée positive.

On pourra chercher des exemples dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

IV.C –

On suppose dans cette sous-partie qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que A^p est strictement positive.

D'après la question 26, r est une valeur propre de A.

Q 32. Montrer que l'espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1, engendré par un vecteur strictement positif.

Q 33. Montrer que r est l'unique valeur propre de A de module égal à r.

On pourra distinguer deux cas suivant la parité de p.