

### III. ÉTUDE DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES ET APPLICATION À UNE MARCHE ALÉATOIRE

**23** La variable aléatoire  $X_1$  étant à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ ,  $(X_1 + 1)/2$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . On a

$$P\left(\frac{1}{2}(X_1 + 1) = 1\right) = P(X_1 = 1) = p$$

et

$$P\left(\frac{1}{2}(X_1 + 1) = 0\right) = P(X_1 = -1) = 1 - p$$

La variable aléatoire  $\frac{1}{2}(X_1 + 1)$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(X_i + 1) = \frac{1}{2}(S_n + n)$$

Comme les variables aléatoires  $X_i$  sont indépendantes et identiquement distribuées, d'après le lemme des coalitions, il en est de même des  $(X_i + 1)/2$ . Ainsi  $Z_n$  est la somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , elle suit donc une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ . Par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = E(2Z_n - n) = 2E(Z_n) - n = 2np - n = n(2p - 1)$$

D'après les propriétés de la variance,

$$V(S_n) = V(2Z_n - n) = V(2Z_n) = 2^2 V(Z_n) = 4np(1 - p)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E(S_n) = n(2p - 1) \quad \text{et} \quad V(S_n) = 4np(1 - p)$$

**24** On initialise une variable  $S$  à 0 qui représente la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et un compteur  $c$  à 0 qui compte le nombre de retours à l'origine. On simule  $n$  fois le lancer de pièce avec la fonction donnée dans l'énoncé, chaque résultat est stocké dans la variable  $a$ . Celui-ci prend une valeur inférieure à  $p$  avec la probabilité  $p$ . Suivant que cette condition est vérifiée ou non, on considère que le point se déplace vers la droite (+1) ou vers la gauche (-1). On teste à la fin de chaque tour de boucle si le point est à l'origine (somme nulle) : si c'est le cas on incrémente le compteur  $c$ , sinon on ne fait rien.

L'énoncé ne précise pas quel paramètre  $p$  on doit considérer. Deux options sont envisageables : considérer que  $p$  est une variable globale et le dire sur la copie, ou ajouter un argument à la fonction, ce qui a été fait ci-dessous.

```
def nombreRetours(n, p):
    S = 0
    c = 0
    for k in range(n):
        a = random.random()
        if a < p:
            S = S + 1
        else:
            S = S - 1
        if S == 0:
            c = c + 1
    return c
```

**25** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a montré à la question 23 que  $S_{2n} = 2Z_{2n} - 2n$  où  $Z_{2n}$  suit une loi binomiale de paramètres  $(2n, p)$ . Par conséquent,

$$a_n = P(S_{2n} = 0) = P(Z_{2n} = n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^{2n-n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n}$$

**26** D'après le résultat de la question 25 et la formule de Stirling,

$$a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} p^n q^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} \sqrt{4\pi n} (e^n)^2}{e^{2n} (n^n)^2 2\pi n} p^n q^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Cette quantité est non nulle et vérifie, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{2n+2}}{a_n x^{2n}} \right| = \frac{\frac{(4pq)^{n+1} |x|^{2n+2}}{\sqrt{\pi(n+1)}}}{\frac{(4pq)^n |x|^{2n}}{\sqrt{\pi n}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4pq |x|^2$$

Posons  $R = \frac{1}{2\sqrt{pq}}$ . D'après le critère de d'Alembert,

- si  $|x| < R$ , alors  $|4pqx^2| < 1$  et la série  $\sum a_n x^{2n}$  converge absolument.
- si  $|x| > R$ , alors  $|4pqx^2| > 1$  et la série  $\sum a_n x^{2n}$  diverge grossièrement.

Ainsi,  $\boxed{\text{La série entière } \sum a_n x^{2n} \text{ a pour rayon de convergence } R = \frac{1}{2\sqrt{pq}}.}$

**27** Par définition, l'expression  $A(x)$  est définie pour  $x = 1$  si et seulement si la série  $\sum a_n$  converge. On a montré à la question 26 que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Distinguons deux cas.

- Si  $p = 1/2$ , alors  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1/\sqrt{\pi n}$  qui est le terme général d'une série de Riemann de paramètre  $1/2 \leq 1$ , donc divergente. Par équivalence des termes généraux de séries à termes positifs, la série  $\sum a_n$  diverge.
- Si  $p \neq 1/2$ , la fonction polynomiale  $t \mapsto 4t(1-t)$  ne prend pas sa valeur maximale 1, atteinte seulement en  $1/2$  qui est le milieu de ses deux racines 0 et 1. Ainsi,

$$0 \leq 4p(1-p) < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq a_n \leq [4p(1-p)]^n$$

Par comparaison à une série géométrique convergente, la série  $\sum a_n$  converge.

En conclusion,

$\boxed{\text{L'expression } A(x) \text{ est définie pour } x = 1 \text{ si et seulement si } p \neq 1/2.}$

**28** Calculons le développement en série entière en 0 de la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-z}} = (1+(-z))^\alpha \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{-1}{2}$$

Il s'agit d'un développement en série entière usuel de rayon de convergence égal à 1. Pour tout  $z \in ]-1; 1[$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} (-z)^n$$

Or  $-2\alpha = 1$ , d'où

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} &= \frac{-2\alpha(-2\alpha+2)\cdots(-2\alpha+2n-2)}{(-2)^nn!} \\ &= \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{(-2)^nn!} \\ &= \frac{(2n)!}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)(-2)^nn!} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n! (-2)^nn!} \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} &= \frac{1}{(-4)^n} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\forall z \in ]-1; 1[ \quad \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} z^n$

Si  $x \in ]-R; R[$  où  $R = 1/(2\sqrt{pq})$ , alors  $z = 4pqx^2$  vérifie  $|z| < 1$ . En évaluant l'expression ci-dessus en un tel  $z$ , on obtient

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} (4pqx^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$$

$$\boxed{\forall x \in ]-R; R[ \quad A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}}$$

**29** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Lorsque l'événement  $(S_{2n} = 0)$  est réalisé, notons

$$k = \min \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid S_{2i} = 0\}$$

Cet entier est bien défini et est unique. De plus, l'union suivante étant disjointe,

$$(S_{2n} = 0) = \bigcup_{k=1}^n ((S_1 \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2k-1} \neq 0) \cap (S_{2k} = 0) \cap (S_{2n} = 0))$$

on obtient

$$\begin{aligned} P(S_{2n} = 0) &= \sum_{k=1}^n P((S_1 \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2k-1} \neq 0) \cap (S_{2k} = 0) \cap (S_{2n} = 0)) \\ &= \sum_{k=1}^n P\left((S_1 \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2k-1} \neq 0) \cap (S_{2k} = 0) \cap \left(\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0\right)\right) \end{aligned}$$

Or l'événement  $(S_1 \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2k-1} \neq 0) \cap (S_{2k} = 0)$  dépend des variables aléatoires  $(S_i)_{1 \leq i \leq 2k}$ , donc de  $X_1, \dots, X_{2k}$  et l'événement

$$\left(\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0\right)$$

dépend de  $X_{2k+1}, \dots, X_{2n}$ . Comme les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_{2n}$  sont supposées mutuellement indépendantes, d'après le lemme des coalitions, ces deux événements sont indépendants. Il vient

$$P(S_{2n} = 0) = \sum_{k=1}^n P((S_1 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2k-1} \neq 0) \cap (S_{2k} = 0)) P\left(\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i\right)$$

Comme l'admet l'énoncé, les variables aléatoires

$$\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i \quad \text{et} \quad S_{2n-2k} = \sum_{i=1}^{2n-2k} X_i$$

suivent la même loi. Par définition des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et comme  $b_0 = 0$ ,

$$a_n = P(S_{2n} = 0) = \sum_{k=1}^n b_k P(S_{2n-2k} = 0) = \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}}$$

**30** Par définition de  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|b_n| \leq 1$ . Par comparaison, le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} b_n x^{2n}$$

est supérieur ou égal à 1. Pour tout  $x \in ]-1; 1[$ , les séries

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} b_n x^{2n}$$

sont absolument convergentes, donc leur produit de Cauchy  $\sum_{n \geq 0} c_n x^{2n}$  également, qui a pour terme général

$$c_0 = a_0 b_0 = 0 = a_0 - 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} = a_n$$

d'après le résultat de la question 29. En considérant les sommes de ces séries, il vient

$$\boxed{\forall x \in ]-1; 1[ \quad A(x) - 1 = A(x)B(x)}$$

On va montrer dans la question 31 que cette égalité est valable sur  $] -R; R[$ .  
On pouvait deviner cette formule car d'après la question 31 de l'énoncé, on est censé trouver  $1 - B = 1/A$ , soit  $AB = A - 1$ .

**31** Soit  $x \in ]-1; 1[$ . On a  $x \in ]-R; R[$ . Par définition, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive donc  $A(x) \geq a_0 = 1 > 0$ . D'après les résultats des questions 30 et 28,

$$B(x) = 1 - \frac{1}{A(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$$

Or la fonction  $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$  est développable en série entière de rayon de convergence égal à  $R$  avec les mêmes calculs qu'à la question 28. Comme ce développement est  $\sum_{n \geq 0} b_n x^{2n}$ ,

$$\boxed{\forall x \in ]-R; R[ \quad B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}}$$

**32** Comme pour tout  $p \in [0; 1]$ ,  $4pq = 4p(1-p) \leq 1$ , d'après l'argumentation de la question 27, l'expression  $B(x)$  est bien définie en  $x = 1$  et  $B(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq}$ . L'expression qui définit  $B(x)$  comme somme d'une série entière étant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}$$

étudions la convergence de la série  $\sum b_n$ . Par définition, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = P((S_1 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} \neq 0) \cap (S_{2n} = 0))$$

Considérons l'événement  $S$  « il existe un temps où le point revient à l'origine » :

$$S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (S_{2n} = 0) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} ((S_1 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} \neq 0) \cap (S_{2n} = 0))$$

en distinguant les cas suivant le premier retour à l'origine, qui existe quand l'événement  $S$  est réalisé, comme à la question 29. Cette union étant constituée d'événements deux à deux disjoints,

$$P(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((S_1 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} \neq 0) \cap (S_{2n} = 0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

ce qui montre que la série  $\sum b_n$  converge. En prime, on obtient

$$P(S) = B(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq}$$

**33** L'événement  $T$  « le point ne revient jamais à l'origine » est le contraire de l'événement  $S$  « il existe un temps où le point revient à l'origine » défini à la question 32. Ainsi,  $P(T) = 1 - P(S) = \sqrt{1 - 4pq}$ . Par ailleurs,

$$|p - q|^2 = (p - q)^2 = (p - (1 - p))^2 = (2p - 1)^2 = 4p^2 - 4p + 1 = 1 - 4p(1 - p) = 1 - 4pq$$

En conclusion,

La probabilité que le point ne revienne jamais en 0 vaut  $|p - q|$ .