

**1** ————— (\*) —————

Soit  $\alpha, \beta$  deux complexes. Déterminer le polynôme caractéristique des matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \alpha & 0 & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \alpha + \beta & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \beta & 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & & (0) & \ddots & \beta \\ & \ddots & & \ddots & \\ (0) & \alpha & \beta & & (0) \\ & \beta & \alpha & & \\ \beta & & (0) & \ddots & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

On traite dans un premier temps le cas de la matrice  $B$ . Il suffit de remarquer que les  $n$  premiers vecteurs suivants sont vecteurs propres associés à la valeur propre  $\alpha + \beta$ , tandis que les  $n$  suivants sont vecteurs propres associés à la valeur propre  $\alpha - \beta$ .

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $\alpha + \beta$  et  $\alpha - \beta$  sont valeurs propres avec des espaces propres associés de dimension au moins  $n$ . Leur somme directe est donc de dimension au moins  $2n$  donc égale à  $\mathbb{C}^{2n}$ . La matrice est donc diagonalisable et par conséquent,

Le polynôme caractéristique de  $B$  est égal à  $(X - \alpha - \beta)^n (X - \alpha + \beta)^n$ .

Le cas de la matrice  $A$  se traite de la même manière : il suffit simplement de constater que le  $(n + 1)$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^{2n+1}$  est également vecteur propre associé à  $\alpha + \beta$ , ce qui fait que l'espace propre associé est cette fois de dimension  $n + 1$ . Par suite,

Le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à  $(X - \alpha - \beta)^{n+1} (X - \alpha + \beta)^n$ .

**2** ————— (\*\*) —————

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Notons  $A$  cette matrice. Il est clair que  $A$  est de rang 2 donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins  $n - 2$  et son espace propre associé, à savoir  $\text{Ker } A$  est de dimension  $n - 2$ . Une base de cet espace est clairement

$$\{ {}^t(0, n, 0, \dots, 0, -2), {}^t(0, 0, n, 0, \dots, 0, -3), \dots, {}^t(0, \dots, 0, n, -(n-1)) \}$$

Soit maintenant  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $A$ . Pour trouver l'espace propre associé à  $\lambda$ , il suffit de trouver une solution non nulle au système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = \lambda x_1 \\ 2x_1 = \lambda x_2 \\ \vdots = \vdots \\ nx_1 = \lambda x_n \end{cases} \quad \text{lequel équivaut,} \quad \text{puisque } \lambda \neq 0 \quad (S') \quad \begin{cases} x_1(\lambda + 4 + \cdots + n^2) = \lambda^2 x_1 \\ x_2 = 2x_1/\lambda \\ \vdots = \vdots \\ x_n = nx_1/\lambda \end{cases}$$

On a donc une solution non triviale si et seulement si  $\lambda$  est racine de l'équation du second degré

$$\lambda^2 - \lambda - \sum_{k=2}^n k^2 = 0$$

auquel cas le sous-espace propre est engendré par le vecteur

$$X_\lambda = {}^t(\lambda, 2, 3, \dots, n)$$

Le discriminant de ce polynôme étant donné par  $\Delta = 1 + 4 \left( \sum_{k=2}^n k^2 \right)$  donc strictement positif, on a deux autres valeurs propres distinctes dont les sous-espaces propres associés sont de dimension 1. Pour conclure,

Si on note  $\Delta = 1 + 4 \left( \sum_{k=2}^n k^2 \right)$ , le spectre de  $A$  est donné par

$$\text{Sp}A = \left\{ 0, \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} \right\}$$

et des bases des espaces propres  $E_0(A)$ ,  $E_{\lambda_1}(A)$  et  $E_{\lambda_2}(A)$  sont respectivement données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \\ \vdots \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n \\ -(n-1) \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \right\}$$

3

(\*)

CCP PC 2019

Soit  $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\Phi$  définie sur  $E$  par

$$\forall f \in E, \quad \Phi(f) : x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

- (a). (i) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .  
(ii) Soit  $g \in \text{Im } \Phi$ . Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Que peut-on en déduire sur  $\Phi$ ?  
(b). Déterminer les valeurs propres de  $\Phi$ .

- (a). (i) Soit  $f \in E$ . L'application  $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$  est continue par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Puisque  $\Phi(f)$  est sa primitive qui s'annule en 0, elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  et en particulier continue. Ainsi,  $\Phi$  est bien à valeurs dans  $E$ .

Justifions la linéarité. Soient  $f, g$  deux éléments de  $E$  et  $\lambda$  un réel. Pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda f + g)(x) &= \int_0^x \frac{(\lambda f + g)(t)}{1+t^2} dt \\ &= \lambda \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt + \int_0^x \frac{g(t)}{1+t^2} dt \\ \Phi(\lambda f + g)(x) &= \lambda \Phi(f)(x) + \Phi(g)(x) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $x$ ,

$$\Phi(\lambda f + g) = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$$

Par suite,

L'application  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .

- (ii) Puisque  $g$  appartient à  $\text{Im } \Phi$ , il existe  $f \in E$  telle que  $g = \Phi(f)$ . On a vu à la question précédente que  $\Phi(f)$  est alors de classe  $\mathcal{C}^1$  car primitive d'une fonction continue. Ainsi,

Si  $g \in \text{Im } \Phi$ , alors  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Cette propriété assure notamment que si  $g$  est un élément de  $E$  qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  (par exemple  $x \mapsto |x|$ ), alors elle n'appartient pas à  $\text{Im } \Phi$ . En particulier,

L'endomorphisme  $\Phi$  n'est pas surjectif.

**Remarque :** L'énoncé ne le demande pas mais on peut sans trop de problèmes montrer que  $\Phi$  est en revanche injectif, en justifiant que son noyau est réduit à la fonction nulle.

- (b). Raisonnons par analyse-synthèse. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\Phi$  et  $f$  un vecteur propre associé. Alors,  $\Phi(f) = \lambda f$  ce qui montre que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\Phi(f))'(x) = \frac{f(x)}{1+x^2} = \lambda f'(x) \quad \text{soit} \quad \lambda f'(x) \cdot (1+x^2) - f(x) = 0$$

Notons que  $f$  étant nécessairement non nulle,  $\lambda$  ne peut pas être nulle ce qui permet d'écrire

$$f'(x) - \frac{1}{\lambda \cdot (1+x^2)} f(x) = 0 \quad (\mathbf{E})$$

La fonction  $f$  est donc solution d'une équation différentielle linéaire du première ordre homogène. Elle est donc de la forme

$$f : x \mapsto k \exp(A(x))$$

où  $k$  est un réel et  $A$  une primitive quelconque de  $x \mapsto 1/(\lambda \cdot (1+x^2))$ , par exemple  $x \mapsto (\arctan x)/\lambda$ .

Réciproquement, soit  $k$  un réel et  $f : x \mapsto k \cdot \exp((\arctan x)/\lambda)$ . Alors  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  et solution de  $(\mathbf{E})$  ce qui montre que  $f$  est une primitive de  $x \mapsto f(x)/(\lambda \cdot (1+x^2))$ . Mais puisque  $f(0) = 0$ , il s'agit de l'unique primitive qui s'annule en 0, ce qui prouve que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{f(x)}{\lambda \cdot (1+x^2)} dx = \frac{1}{\lambda} \Phi(f)(x) \quad \text{d'où} \quad \Phi(f) = \lambda f$$

ce qui montre que  $f$  est bien vecteur propre de  $\Phi$  associé à  $\lambda$ . Pour conclure,

$$\boxed{\text{Sp } \Phi = \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad E_\lambda(\Phi) = \text{Vect} \{x \mapsto \exp((\arctan x)/\lambda)\}}$$

4

(\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $v$  un élément de  $E$  non nul. On note

$$E_v = \{u \in \mathcal{L}(E), \quad v \text{ est vecteur propre de } u\}$$

Montrer que  $E_v$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  et donner sa dimension.

Il est clair que  $v$  est vecteur propre de l'endomorphisme nul (pour la valeur propre 0), donc ce dernier appartient à  $E_v$ . Par ailleurs, si  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $E_v$  et  $\lambda$  un scalaire, il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$f(v) = \alpha v \quad \text{et} \quad g(v) = \beta v \quad \text{d'où} \quad (\lambda f + g)(v) = (\lambda \alpha + \beta) v$$

Ainsi,  $v$  est vecteur propre également de  $\lambda f + g$  et ce dernier est élément de  $E_v$ . On peut donc conclure

$$\boxed{E_v \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E).}$$

Complétons maintenant  $\{v\}$  en une base  $\mathcal{B} = \{v, e_2, \dots, e_n\}$  de  $E$ . Un endomorphisme  $u$  de  $\mathcal{L}(E)$  appartient à  $E_v$  si et seulement si sa matrice respectivement à la base  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$\left( \begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } D \in \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$$

Compte tenu de l'isomorphisme  $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ , la dimension de  $E_v$  est égale à celle des matrices de cette forme soit

$$\boxed{\dim E_v = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1}$$

5

(\*\*\*)

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $AB = 0$ .

- Montrer que  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre en commun.
- En déduire l'existence de  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP$  et  $P^{-1}BP$  soient toutes deux triangulaires supérieures.

- (a) Si  $\text{Im } B$  est réduit à  $\{0\}$ , cela signifie que  $B$  est nulle et alors, n'importe quel vecteur propre associé à  $A$  convient (il en existe un car  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ).

Si  $\text{Im } B$  est de dimension au moins 1, on peut considérer l'endomorphisme induit par  $B$  sur  $\text{Im } B$  (puisque ce dernier est clairement stable par  $B$ ). Il admet au moins un vecteur propre (car on est dans  $\mathbb{C}$ ). Puisque  $AB = 0$ , on a  $\text{Im } B \subset \text{Ker } A$ , ce qui prouve que ce vecteur propre est également vecteur propre pour  $A$  associé à la valeur propre 0. Finalement dans tous les cas,

$A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun.

- (b) On raisonne par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , le résultat est évident car toute matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  est triangulaire supérieure. Supposons maintenant que toutes matrices  $C, D$  de  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$  vérifiant  $CD = 0$  sont simultanément trigonalisables. Soient  $A, B$  de taille  $n$  telles que  $AB = 0$ . D'après le (a), on peut trouver un vecteur propre commun, que l'on peut compléter en une base de  $\mathbb{K}^n$ . Soit  $S$  la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base. Alors,  $S^{-1}AS$  et  $S^{-1}BS$  sont de formes respectives

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = S^{-1}BS = \begin{pmatrix} \mu & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda, \mu$  deux scalaires. Maintenant, puisque  $AB = 0$ , on a  $A'B' = 0$  et donc par produit par blocs, il vient  $A_2B_2 = 0$ . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ces deux éléments de  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$  ce qui prouve l'existence de  $Q \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$  telle que  $Q^{-1}A_2Q$  et  $Q^{-1}B_2Q$  soient triangulaires supérieures. Il suffit alors de poser

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{auquel cas} \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

pour avoir grâce au produit par blocs

$$A'' = R^{-1}A'R = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1}A_2Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B'' = R^{-1}BR = \begin{pmatrix} \mu & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1}B_2Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On a donc bien  $A''$  et  $B''$  triangulaires supérieures avec  $A'' = P^{-1}AP$  et  $B'' = P^{-1}BP$  où l'on a posé  $P = SR$ . La propriété est donc vraie pour des matrices de taille  $n$ .

Si  $AB = 0$ , alors  $A$  et  $B$  sont simultanément trigonalisables.

**6** ————— (\*) —————

Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $u(P) = (X+2)P(X) - (X+1)P(X+1)$

Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Est-il diagonalisable ? Déterminer enfin le rang de  $u$  et son noyau.

La linéarité de  $u$  est évidente. De plus, pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} u(X^p) &= (X+2)X^p - (X+1)^{p+1} \\ &= X^{p+1} + 2X^p - \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} X^k \\ u(X^p) &= (1-p)X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^k \end{aligned}$$

On en déduit que  $u(P)$  est de degré au plus  $p$  donc  $\mathbb{R}_n[X]$  est bien stable par  $u$  qui est donc un endomorphisme.

Le calcul précédent montre également que la matrice de  $u$  respectivement à la base canonique est triangulaire supérieure, avec pour éléments diagonaux  $1, 0, -1, \dots, 1-n$ . Il s'ensuit que  $u$  admet  $n+1$  valeurs propres distinctes. Ainsi,

L'application  $u$  définit un endomorphisme diagonalisable de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Il est clair que la matrice de  $u$  est de rang  $n$  donc  $\text{rg } u = n$ . D'après le théorème du rang,  $\text{Ker } u$  est donc de dimension 1. En remarquant que  $X+1$  appartient à ce noyau, on peut conclure.

$u$  est de dimension 1 et  $\text{Ker } u = \text{Vect}\{X+1\}$ .

**7** ————— (\*\*) ————— **CCP PC 2009**

Soit  $J$  l'élément de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1 et  $f$  l'application définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = JM - MJ$$

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme et déterminer sa matrice respectivement à la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable? Déterminer ses valeurs propres et les espaces propres associés.
- Déterminer une base de  $\text{Ker } f$  et une base de  $\text{Im } f$ .
- Soit  $B$  un élément de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Résoudre l'équation  $f(M) = B$  d'inconnue  $M$ .

- (a) Le fait que  $f$  soit un endomorphisme est trivial. Pour calculer sa matrice respectivement à la base canonique, on détermine les images de la base canonique par  $f$ . Pour cela, on écrit que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies JM - MJ = \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}$$

Cette formule permet aisément le calcul des 4 images de la famille  $\mathcal{B} = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$  et on trouve

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ . Le calcul du polynôme caractéristique est immédiat et donne

$$\chi_f = \chi_A = X^4 - 4X^2 = X^2(X+2)(X-2)$$

Pour vérifier si  $f$  est diagonalisable, il suffit donc de vérifier si  $\text{Ker } f$  est bien de dimension 2. La matrice  $A$  étant clairement de rang 2, c'est le cas.

L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.

Les sous-espaces propres de  $A$  sont respectivement

$$\text{Ker } A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Ker } (A - 2I_4) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

et pour finir

$$\text{Ker } (A + 2I_4) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Par suite, ceux de  $f$  sont donnés par

$$E_0(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad E_2(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{-2}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (c) La base de  $\text{Ker } f$  a été donnée à la question précédente. Quand à celle de  $\text{Im } f$ , il suffit de prendre les vecteurs engendrant les deux autres espaces propres.

$$\text{Im } f = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (d) Notons
- $$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dans un premier temps, l'équation a une solution si et seulement  $B$  appartient à  $\text{Im } f$ . Soit si et seulement si il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$B = \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & \mu - \lambda \\ \lambda - \mu & -\lambda - \mu \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à la condition  $a = -d$  et  $b = -c$ . Réciproquement, si cette condition est remplie, on a

$$B = f(M) \quad \text{avec} \quad M = \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{\mu}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et où  $\lambda$  et  $\mu$  sont définis par le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \mu - \lambda = b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \lambda = (a-b)/2 \\ \mu = (a+b)/2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b & -a \\ a & b \end{pmatrix}$$

Les solutions de cette équation linéaire sont obtenues en rajoutant à cette solution particulière un élément du noyau. Pour conclure,

$$\text{L'équation } f(M) = B \text{ a une solution si et seulement si } B \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \text{ et alors}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b & -a \\ a & b \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

8 (\*)

(a). Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer le premier des deux déterminants suivant et en déduire la valeur du second :

$$D_n(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots \\ (0) & & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} \quad P_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots \\ (0) & & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix}$$

(b). Soit  $z \in \mathbb{C}$ . La matrice suivante est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?

$$A_z = \begin{pmatrix} z & 1 & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots \\ (0) & & 1 & z \end{pmatrix}$$

(a) Par convention, on pose  $\Delta_0 = 1$ . Pour  $n \geq 2$ , on a en développant par rapport à la première colonne la relation de récurrence

$$D_n(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)D_{n-1}(\alpha, \beta) - \alpha\beta D_{n-2}(\alpha, \beta)$$

Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, d'équation caractéristique  $r^2 - (\alpha + \beta)r + \alpha\beta = 0$  qui admet  $\alpha$  et  $\beta$  pour racines. Si  $\alpha \neq \beta$ , on en déduit l'existence de deux complexes  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_n(\alpha, \beta) = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$$

Les conditions initiales donnent le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \alpha + \mu \beta = \alpha + \beta \end{cases} \quad \text{d'où} \quad (\lambda, \mu) = \frac{1}{\beta - \alpha}(-\alpha, \beta)$$

et donc

$$D_n(\alpha, \beta) = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta$$

Lorsque  $\alpha = \beta$ , la nature des solutions de la relation de récurrence change. Plutôt que de refaire le calcul, il suffit de remarquer que  $\beta \mapsto D_n(\alpha, \beta)$  est polynomiale en  $\beta$  donc continue, et donc

$$D_n(\alpha, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

d'où

$$D_n(\alpha, \alpha) = (n+1)\alpha^n$$

Pour calculer  $P_n(\theta)$ , il suffit d'appliquer le résultat précédent avec  $\alpha = e^{i\theta}$  et  $\beta = e^{-i\theta}$ , qui sont égaux si et seulement si  $\theta \equiv 0[\pi]$ . Par suite,

$$P_n(\theta) = \begin{cases} (n+1) & \text{si } \theta \equiv 0[2\pi] \\ e^{in\pi}(n+1) = (-1)^n(n+1) & \text{si } \theta \equiv \pi[2\pi] \\ \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b) L'expression précédente de  $P_n(\theta)$  montre que ce dernier déterminant est nul lorsque  $\sin((n+1)\theta)$  est nul et  $\sin(\theta)$  non nul. On a donc

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \begin{vmatrix} 2\cos(\theta_k) & 1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 & 2\cos(\theta_k) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$$

On en déduit que pour tout complexe  $\lambda_k$  de la forme  $z - 2\cos(\theta_k)$ , la matrice  $A_z - \lambda_k I_n$  a un déterminant non nul donc  $\lambda_k$  est valeur propre. Ces valeurs étant deux à deux distinctes,  $A_z$  admet  $n$  valeurs propres distinctes et donc

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , la matrice  $A_z$  est diagonalisable.

9

(\*\*)

X PC 2019

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  de rang 1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $u$  soit diagonalisable.

Puisque  $u$  est de rang 1, son noyau est de dimension  $n-1$  où  $n$  est la dimension de  $E$ . Soit donc  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base de  $\text{Ker } u$  que l'on complète en  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ . Alors, la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

De plus, puisque la trace de  $u$  est égal à celle de sa matrice dans une base quelconque, on a nécessairement  $m_{n,n} = \text{Tr } u$ . Par suite, le polynôme caractéristique de  $u$  est de la forme

$$\chi_u = X^{n-1}(X - \text{Tr } u)$$

On peut maintenant distinguer deux cas :

- Si  $u$  est de trace nulle, alors  $\chi_u = X^n$  dont 0 est la seule valeur propre de  $u$  et de multiplicité  $n$ . L'espace propre associé  $\text{Ker } u$  étant de dimension  $n-1$ , on en déduit que  $u$  n'est pas diagonalisable.
- Si  $u$  n'est pas de trace nulle, alors  $\chi_u$  admet deux racines distinctes 0 et  $\text{Tr } u$  de multiplicités respectives  $n-1$  et 1. L'espace propre associé à 0 est  $\text{Ker } u$  de dimension  $n-1$ . L'espace propre associé à  $\text{Tr } u$  est nécessairement 1 car  $\text{Tr } u$  est racine simple du polynôme caractéristique. On en déduit que  $u$  est diagonalisable.

Pour conclure,

Un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

10

(\*\*)

Montrer que si  $f$  est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie, alors  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires. La réciproque est-elle vraie ?

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $f$ . Si 0 n'est pas valeur propre de  $f$ , cela signifie que  $f$  est bijective auquel cas

$$\text{Ker } f = \{0\} \quad \text{et} \quad \text{Im } f = E \quad \text{d'où} \quad \text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$$

Sinon, on peut sans perdre de généralité supposer  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2, \dots, \lambda_p \neq 0$ . On sait alors que

$$\text{Ker } f = E_{\lambda_1}(f) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{k=2}^p E_{\lambda_k}(f) \subset \text{Im } f$$

Le théorème du rang et le caractère diagonalisable de  $f$  donnent

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E = \sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k}(f)$$

On a donc égalité des dimensions dans l'inclusion précédente, donc égalité des ensembles. Ainsi,

$$\text{Im } f = \bigoplus_{k=2}^p E_{\lambda_k}(f)$$

et puisque  $f$  est la somme directe de ses espaces propres,

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$$

La réciproque n'est bien entendue pas vérifiée. Il suffit par exemple de prendre un endomorphisme non diagonalisable et bijectif, comme par exemple l'endomorphisme  $P \mapsto P + P'$  de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Sa matrice dans la base canonique est triangulaire supérieure

avec ses éléments diagonaux tous égaux à 1. Son spectre est donc réduit à  $\{1\}$ , ce qui prouve qu'il n'est pas diagonalisable (sinon sa matrice serait semblable à  $I_{n+1}$  donc égale à  $I_{n+1}$  ce qui n'est pas le cas).

**11**

(\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On définit alors

$$\begin{aligned}\varphi_f : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ g &\longmapsto f \circ g\end{aligned}$$

- (a). Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ , elle est valeur propre de  $\varphi_f$  et déterminer la dimension de  $E_\lambda(\varphi_f)$  en fonction de celle de  $E_\lambda(f)$ .
- (b). Que peut-on en déduire si  $f$  est diagonalisable ?

(a) Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $F_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda I_d)$ . Soit maintenant  $g \in \mathcal{L}(E)$ . Alors, on a les équivalences

$$\begin{aligned}\varphi_f(g) = \lambda g &\iff f \circ g = \lambda g \\ &\iff \forall x \in E, \quad f(g(x)) = \lambda g(x) \\ &\iff \forall x \in E, \quad g(x) \in F_\lambda \\ \varphi_f(g) = \lambda g &\iff \text{Im } g \subset F_\lambda\end{aligned}$$

Si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ , alors  $E_\lambda(f) = F_\lambda$  est non réduit à  $\{0\}$ . L'ensemble des  $g \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $\varphi_f(g) = \lambda g$  est alors non réduit à l'endomorphisme nul et isomorphe à  $\mathcal{L}(E, E_\lambda(f))$ , donc de dimension  $\dim E \cdot \dim E_\lambda(f)$ . Finalement,

Si  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ , alors  $\lambda \in \text{Sp}(\varphi_f)$  et l'espace propre associé est de dimension  $\dim E \cdot \dim E_\lambda(f)$ .

(b) Si  $f$  est diagonalisable, on peut noter  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ses valeurs propres deux à deux distinctes, auquel cas

$$\dim E = \sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(f)$$

D'après ce qui précède,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont également valeurs propres de  $\varphi_f$  et la somme des dimensions des espaces propres associés vaut

$$\sum_{i=1}^p \dim E \cdot \dim E_{\lambda_i}(f) = \dim E \cdot \sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(f) = (\dim E)^2 = \dim \mathcal{L}(E)$$

On en déduit que  $\varphi_f$  n'a pas d'autres valeurs propres que celles de  $f$ , et que  $\mathcal{L}(E)$  est la somme des espaces propres associés. En d'autres termes,

Si  $f$  est diagonalisable, il en est de même de  $\varphi_f$  (qui a aussi le même spectre).

**12**

(\*\*)

**Mines PC 2016**

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $f \circ f$  est diagonalisable. Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ .

Le sens direct est systématiquement vérifié indépendamment de l'hypothèse  $f^2$  diagonalisable. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $f$ . Si 0 n'est pas valeur propre de  $f$ , cela signifie que  $f$  est bijective auquel cas

$$\text{Ker } f = \{0\} \quad \text{et} \quad \text{Im } f = E \quad \text{d'où} \quad \text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$$

Sinon, on peut sans perdre de généralité supposer  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2, \dots, \lambda_p \neq 0$ . On sait alors que

$$\text{Ker } f = E_{\lambda_1}(f) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{k=2}^p E_{\lambda_k}(f) \subset \text{Im } f$$

Le théorème du rang et le caractère diagonalisable de  $f$  donnent

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E = \sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k}(f)$$

On a donc égalité des dimensions dans l'inclusion précédente, donc égalité des ensembles. Ainsi,

$$\text{Im } f = \bigoplus_{k=2}^p E_{\lambda_k}(f)$$

et puisque  $f$  est la somme directe de ses espaces propres,

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$$

Pour la réciproque, remarquons que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $f$ . Puisque leur intersection est réduite à  $\{0\}$ , ils sont supplémentaires par le théorème du rang, et  $f$  est diagonalisable si les endomorphismes induits sur ces espaces le sont. Celui induit sur  $\text{Ker } f$  est bien entendu nul donc diagonalisable. Notons  $g$  celui induit par  $f$  sur  $\text{Im } f$ .  $g$  est alors bijectif, car son noyau est  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ . Ainsi,  $g^2$  est également bijectif. Mais puisqu'il s'agit également de l'induit par  $f^2$  sur  $\text{Im } f$ , il est aussi diagonalisable. Notons donc  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ses valeurs propres (non nulles par bijectivité). Alors,

$$\text{Im } f = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(g^2)$$

Maintenant,  $g$  commute avec  $g^2$  donc  $E_{\lambda_i}(g^2)$  est stable par  $g$  pour tout  $i$ . L'induit  $g_i$  par  $g$  sur cet espace vérifie  $g_i^2 = \lambda_i I_d$ . Si l'on note  $\mu_i$  une racine de  $\lambda_i$  dans  $\mathbb{C}$ , on a donc  $(g_i/\mu_i)^2 = I_d$  donc  $g_i/\mu_i$  est une symétrie, donc un endomorphisme diagonalisable. Au final, on a donc écrit

$$E = \text{Ker } f \oplus \left[ \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(g^2) \right]$$

et  $f$  induit sur chacun des espaces de cette somme directe des endomorphismes diagonalisable (nul sur  $\text{Ker } f$ , égal à  $\mu_i g_i$  sur  $E_{\lambda_i}(g^2)$ ). Par conséquent,  $f$  est diagonalisable. On peut donc conclure :

Si  $f^2$  est diagonalisable, alors  $f$  l'est si et seulement si  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ .

**13** \_\_\_\_\_ (\*\*) \_\_\_\_\_ **X PC 2010**

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si pour tout polynôme non constant  $P$ , on peut trouver  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  tel que  $A = P(M)$ .

Supposons  $A$  diagonalisable. Il existe  $Q$  inversible et deux scalaires  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} Q$$

Si maintenant  $P$  est un polynôme non constant, l'équation  $P(x) = \lambda$  (resp.  $P(x) = \mu$ ) a au moins une solution  $\alpha \in \mathbb{C}$  (resp.  $\beta \in \mathbb{C}$ ) en vertu du théorème de d'Alembert. Il suffit alors de poser

$$M = Q^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} Q$$

pour avoir  $P(M) = A$ . Par conséquent, le sens direct est démontré.

Supposons maintenant  $A$  non diagonalisable. Il existe cette fois  $Q$  inversible et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que

$$A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q$$

Prenons alors  $P = X^2 + \lambda$ . Si  $M$  est telle que  $P(M) = A$ , alors  $M^2 = A - \lambda I_2$  soit

$$M^2 = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \quad \text{et donc} \quad M^4 = 0$$

La matrice  $M$  est donc nilpotente et de taille 2. Mais on sait que dans un tel cas,  $M^2 = 0$ , d'où une absurdité. Ainsi, il n'existe aucune matrice  $M$  telle que  $P(M) = A$  avec  $P = X^2 + \lambda$ .

Un élément  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  est diagonalisable si et seulement si pour tout polynôme  $P$  non constant, l'équation  $P(M) = A$  a au moins une solution.

**14** \_\_\_\_\_ (\*\*) \_\_\_\_\_ **CCP PC 2013**

Soit  $A$  un élément non nul de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  tel que  $A^3 = -A$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  associé à  $A$ .

(a). Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } (u^2 + I_d)$ .

(b). Montrer que  $A$  est semblable à  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c). Donner la dimension et une base de  $C(A)$ .

(d). Résoudre l'équation  $X^6 + X^2 = 0$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

(a) Soit  $x \in \text{Ker } u \cap \text{Ker } (u^2 + I_d)$ . Alors,

$$u(x) = 0 \quad \text{et} \quad u^2(x) + x = 0 \quad \text{d'où} \quad x = -u(0) = 0$$

Par ailleurs, pour tout élément  $x \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$u^3(x) = -u(x) \quad \text{d'où} \quad u(u^2(x) + x) = 0 \quad \text{mais aussi} \quad (u^2 + I_d)(u^2(x)) = 0$$

Cela permet d'écrire

$$x = \underbrace{x + u^2(x)}_{\in \text{Ker } u} - \underbrace{u^2(x)}_{\in \text{Ker } (u^2 + I_d)}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } (u^2 + I_d)}$$

(b) On sait que  $u \circ (u^2 + I_d) = 0$ . Si  $u^2 + I_d$  est injectif, il est bijectif. On en déduit que  $u = 0$ , ce qui est contraire aux hypothèses. Si maintenant  $u$  est injectif, il est bijectif et on en déduit  $u^2 = -I_d$  d'où en passant au déterminant

$$\det(u^2) = \det(u)^2 = \det(-I_d) = -1$$

car  $\mathbb{R}^3$  est de dimension impaire. C'est absurde.

Ces considérations assurent que  $\text{Ker } u$  et  $\text{Ker } (u^2 + I_d)$  sont non réduits à  $\{0\}$  ce qui permet de choisir  $x_1$  non nul dans  $\text{Ker } u$ ,  $x_2$  non nul dans  $\text{Ker } (u^2 + I_d)$ , et enfin de poser  $x_3 = u(x_2)$ . Alors, nécessairement  $u(x_3) = -x_2$ .

Ainsi défini,  $\{x_1\}$  est une famille libre de  $\text{Ker } u$ . Vérifions que  $\{x_2, x_3\}$  en est une de  $\text{Ker } (u^2 + I_d)$ . Elle est liée si et seulement si  $x_2$  et  $x_3$  sont colinéaires, soit comme  $x_2 \neq 0$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $x_3 = \lambda x_2$ . Mais alors,

$$-x_2 = u(x_3) = \lambda u(x_2) = \lambda x_3 = \lambda^2 x_2 \quad \text{d'où} \quad \lambda^2 = -1$$

C'est impossible et  $\{x_2, x_3\}$  est libre. Il s'ensuit compte tenu de la somme directe que  $\{x_1, x_2, x_3\}$  est libre donc constitue une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $u$  est exactement  $M$ . Ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est semblable à } M.}$$

(c) Il existe  $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP = M$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Alors,

$$AX = XA \iff PMP^{-1}X = X PMP^{-1} \iff MY = YM \quad \text{avec} \quad Y = P^{-1}XP$$

Déterminons donc les matrices qui commutent avec  $M$ . Notons  $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ . Alors,

$$MY - YM = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ -g & -f - h & e - i \\ d & e - i & f + h \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} f = -h \\ i = e \\ b = c = g = d = 0 \end{cases}$$

Finalement,  $Y$  commute avec  $M$  si et seulement si elle est de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix}$  soit

$$C(M) = \text{Vect} \{E_{1,1}, E_{2,2} + E_{3,3}, E_{2,3} - E_{3,2}\}$$

et d'après l'équivalence précédente,

Soit  $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP = M$ . Alors, le sous-espace vectoriel des matrices commutant avec  $A$  est de dimension 3 et précisément,

$$C(A) = \text{Vect} \{P^{-1}E_{1,1}P^{-1}, (E_{2,2} + E_{3,3})P^{-1}, P(E_{2,3} - E_{3,2})P^{-1}\}$$

(d) Soit  $X$  telle que  $X^6 + X^2 = 0$ . On note  $A = X^2$ . Si  $X^2 \neq 0$ , alors  $A \neq 0$  et donc, d'après le (b), il existe  $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $X^2 = PMP^{-1}$ . Notons alors  $Y = P^{-1}XP$  de sorte que  $Y^2 = M$ . On en déduit facilement que  $Y$  et  $M$  commutent, donc d'après le (c), il existe  $a, e, f \in \mathbb{R}$  tels que

$$Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & -f \\ 0 & f & e \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 - f^2 & -2ef \\ 0 & 2ef & e^2 - f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $a = 0$ , ainsi que  $e^2 = f^2$  et  $ef = 1/2$ . On a donc  $|e| = |f|$ , ainsi que  $e$  et  $f$  de mêmes signes, donc  $e = f = \pm 1/\sqrt{2}$ . Pour conclure,

$$Y = \pm Y_0 \quad \text{avec} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et donc  $X = PYP^{-1}$ . Réciproquement, on vérifie facilement que toute matrice  $X$  nilpotente d'ordre 2 ou de la forme  $\pm PY_0P^{-1}$  avec  $P$  inversible vérifie l'équation.

Les solutions de l'équation  $X^6 + X^2 = 0$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  sont les matrices nilpotentes d'ordre 2, et les matrices de la forme

$$X = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } P \text{ inversible}$$

15

(\*\*)

X PC 2010

Déterminer les matrices  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telles que  $A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Notons  $J$  la matrice de droite. On commence par remarquer que  $J$  est diagonalisable, de valeurs propres 1 et  $-1$  et de sous-espaces propres associés

$$E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad E_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si  $A$  est telle que  $A^2 + A + I_2 = J$ , alors  $A$  et  $J$  commutent, car  $J$  est un polynôme en  $A$ . Les sous-espaces propres de  $J$  sont donc stables par  $A$ , ce qui signifie que si l'on note  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres de  $J$ , alors  $P^{-1}AP$  est diagonale. Il existe donc deux complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad D^2 + D + I_2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha + 1 & 0 \\ 0 & \beta^2 + \beta + 1 \end{pmatrix} = P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, 
$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha = 0 \\ \beta^2 + \beta + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \alpha \in \{-1, 0\} \quad \text{et} \quad \beta \in \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \right\}$$

L'équation admet finalement au plus quatre solutions, mais on vérifie facilement en reprenant les calculs en sens inverse qu'elles conviennent. Précisément,

Les solutions de l'équation  $A^2 + A + I_2 = J$  sont les matrices de la forme

$$P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \alpha \in \{-1, 0\} \\ \beta \in \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \right\} \end{cases}$$

16

(\*\*)

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{a^2}{n^2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n$$

Notons

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{a^2}{n^2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} \chi_A &= X^2 - \text{Tr } A X + \det A \\ &= X^2 - 2X + 1 + \frac{a^2}{n^2} \\ &= (X - 1)^2 + \frac{a^2}{n^2} \\ \chi_A &= \left( X - 1 - \frac{ia}{n} \right) \left( X - 1 + \frac{ia}{n} \right) \end{aligned}$$

Le spectre de  $A$  est donc  $\{\lambda_n, \overline{\lambda_n}\}$  avec  $\lambda_n = 1 + ia/n$ .

**1er cas :  $a \neq 0$** 

Les deux valeurs propres sont distinctes donc la matrice est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Cherchons un vecteur propre associé à la première valeur propre. Soit  $X = {}^t(x, y) \in \mathbb{C}^2$ . Alors,

$$AX = \lambda_n X \iff -x + \overline{\lambda_n} y = 0 \iff X \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} \overline{\lambda_n} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La matrice  $A_n$  étant réelle, on en déduit qu'un vecteur propre associé à  $\overline{\lambda_n}$  est  ${}^t(\lambda_n, 1)$ . Au final, on a donc

$$P_n^{-1} A_n P_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P_n = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_n} & \lambda_n \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_n^{-1} = \frac{1}{\overline{\lambda_n} - \lambda_n} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_n \\ -1 & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} A_n^n &= \frac{1}{n} P_n \begin{pmatrix} \lambda_n^n & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_n}^n \end{pmatrix} P_n^{-1} \\ &= \frac{-1}{2ia} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_n} & \lambda_n \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_n^n & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_n}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_n \\ -1 & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il est clair que  $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ . De plus, on peut écrire

$$\lambda_n = \rho_n e^{i\alpha_n} \quad \text{avec} \quad \rho_n = \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \arctan(a/n)$$

donc

$$\lambda_n^n = \rho_n^n e^{in\alpha_n} = \exp \left( \frac{n}{2} \ln \left( 1 + \frac{a^2}{n^2} \right) + in \arctan \left( \frac{a}{n} \right) \right)$$

Grâce aux développements limités de  $t \mapsto \ln(1+t)$ ,  $\arctan$  et la continuité de l'exponentielle complexe, il s'ensuit que

$$\lambda_n^n = \left( 1 + \frac{ia}{n} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{ia}$$

On en déduit donc que

$$\frac{1}{n} A_n^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{-1}{2ia} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sin a}{a} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2ème cas :  $a = 0$** 

La matrice  $A_n$  ne dépend plus de  $n$  donc on la note  $A$ . On a 1 pour unique valeur propre et  $A$  n'est pas l'identité donc elle n'est pas diagonalisable. Elle est en revanche trigonalisable, et précisément

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

puis pour  $n \geq 1$

$$\frac{1}{n} A^n = \frac{1}{n} P \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, quitte à prolonger  $\sin a/a$  en 0 par 1, on obtient dans les deux cas

$$\boxed{\frac{1}{n} A_n^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\sin a}{a} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

**17**

(\*)

**X PC 2016**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ . Déterminer la dimension de  $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AB = BA\}$ .

La matrice  $A$  est triangulaire supérieure donc son spectre est égal à l'ensemble de ses coefficients diagonaux, soit  $\{1, 4, 6\}$ . Elle admet trois valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable. Soit donc  $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = D$$

Notons que si  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , alors

$$AB = BA \iff (PDP^{-1})B = B(PDP^{-1}) \iff D(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)D$$

En d'autres termes,  $B$  commute avec  $A$  si et seulement si  $P^{-1}BP$  commute avec  $D$ . Puisque  $M \mapsto P^{-1}MP$  est un isomorphisme, il s'ensuit que

$$\dim \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AB = BA\} = \dim \{C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), CD = DC\}$$

**18** ————— (\*\*) ————— **Centrale PC 2008**

Déterminer les matrices  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telles que  $A$  et  $A^2$  soient semblables. On exprimera le résultat sous la forme  $A = PBP^{-1}$  avec  $P$  inversible arbitraire et  $B$  la plus simple possible.

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  semblable à son carré. On distingue deux cas.

- Supposons  $A$  diagonalisable. Il existe deux complexes  $\lambda$  et  $\mu$ , pas nécessairement distincts, et une matrice  $P$  inversible tels que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P \quad \text{d'où} \quad A^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} P$$

Les matrices  $A$  et  $A^2$  étant semblables, on en déduit qu'elles ont mêmes spectres donc

$$\begin{cases} \lambda = \lambda^2 \\ \mu = \mu^2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \{\lambda, \mu\} \subset \{0, 1\} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = \mu^2 \\ \mu = \lambda^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad (\lambda, \mu) \in \{(0, 0), (j, j^2), (j^2, j)\}$$

avec  $j = \exp(2i\pi/3)$ .

- Supposons  $A$  non diagonalisable. Il existe un complexe  $\lambda$  et une matrice inversible  $P$  tels que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P \quad \text{d'où} \quad A^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} P$$

$A$  et  $A^2$  ayant même spectre, on en déduit que  $\lambda^2 = \lambda$  donc  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = 0$ . Mais le deuxième cas est à exclure car alors,  $A^2$  est nulle sans que  $A$  le soit.

On a donc justifié que si  $A$  est semblable à  $A^2$ , elle est nécessairement semblable à l'une des cinq matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

La réciproque est évidente puisque ces cinq matrices sont semblables à leur carré. Au final,

Les éléments de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  semblables à leur carré sont celles de la forme  $P^{-1}MP$  avec  $P$  inversible et  $M$  l'une des cinq matrices de (\*)

**19** ————— (\*\*) ————— **X PC 2010**

Déterminer les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  stables par l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Remarquons dans un premier temps que  $u$  admet 1 et 2 pour valeurs propres, et que les espaces propres associés sont de dimension 1. Précisément, en notant  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$E_1(u) = \text{Vect}\{e_3\} \quad \text{et} \quad E_2(u) = \text{Vect}\{e_1\}$$

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel stable par  $u$ . Si  $F$  est de dimension 0, c'est nécessairement  $\{0\}$ . S'il est de dimension 3, c'est forcément  $\mathbb{R}^3$ . S'il est de dimension 1, il est engendré par un vecteur propre de  $u$ . Un tel vecteur étant colinéaire soit à  $e_1$ , soit à  $e_3$ , on en déduit que  $F$  est l'un des deux espaces propres.

Reste le cas où  $F$  est de dimension 2. Notons  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ . Alors  $\chi_{\tilde{u}}$  divise  $\chi_u = (X-1)(X-2)^2$ . Distinguons les deux cas :

- Si  $\chi_{\tilde{u}} = (X-1)(X-2)$ , alors 1 et 2 sont valeurs propres, et  $\tilde{u}$  admet deux vecteurs propres associés. Comme précédemment, il s'ensuit nécessairement que  $F = E_1(u) + E_2(u)$ .
- Si  $\chi_{\tilde{u}} = (X-2)^2$ , alors  $\tilde{u}$  est trigonalisable, et sa matrice dans une base  $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$  avec  $f_1$  vecteur propre pour la valeur propre 2 est de la forme

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Le spectre de  $u$  étant réduit à  $\{2\}$ , on a nécessairement  $\beta = 2$  et par suite, on constate que

$$(M - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

Cela se traduit par  $\tilde{u}^2 = 0$ , et donc  $F \subset \text{Ker}(u - 2I_d)^2$ . On vérifie facilement que  $\text{Ker}(u - 2I_d)^2 = \text{Vect}\{e_1, e_2\}$ , qui est de dimension 2, et on peut donc conclure que  $F = \text{Ker}(u - 2I_d)^2$ .

Pour conclure,

Les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $u$  sont  
 $\{0\}$ ,  $E_1(u)$ ,  $E_2(u)$ ,  $E_1(u) + E_2(u)$ ,  $\text{Ker}(u - I_d)^2$  et  $\mathbb{R}^3$

**20**

(\*\*\*)

**X PC 2010**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $f \circ g = f + g$ .

- (a) Montrer que  $\text{Ker } f = \text{Ker } g$  et  $\text{Im } f = \text{Im } g$ .  
 (b) On suppose  $f$  et  $g$  diagonalisables. Montrer que  $f \circ g$  est diagonalisable et que son spectre est inclus dans  $\mathbb{R} \setminus ]0; 4[$ .

- (a) Soit  $x \in \text{Ker } g$ . Alors  $(f \circ g)(x) = f(0) = 0 = f(x) + g(x) = f(x)$

On a donc  $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$ . Considérons maintenant  $x \in \text{Im } g$ . Il existe  $a$  tel que

$$x = g(a) = (f \circ g)(a) - f(a) = f(g(a) - a)$$

Il s'ensuit que  $\text{Im } g \subset \text{Im } f$ . Appliquons maintenant le théorème du rang. En vertu des inclusions précédentes, on a

$$\dim E = \dim \text{Ker } g + \dim \text{Im } g \leq \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f \leq \dim E$$

Nécessairement, on a donc  $\dim \text{Ker } g = \dim \text{Ker } f$  et  $\dim \text{Im } g = \dim \text{Im } f$ . Ayant égalité des dimensions et inclusions, on en déduit que

$$\text{Ker } f = \text{Ker } g \quad \text{et} \quad \text{Im } f = \text{Im } g$$

- (b) Soit  $\mathcal{B}$  une base de diagonalisation de  $f$ . Notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ . Alors,  $A$  est diagonale et on a  $AB = A + B$  soit

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad a_{i,i}b_{i,i} = a_{i,i} + b_{i,i} \quad (*) \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad a_{i,i}b_{i,j} = b_{i,j} \quad (**)$$

La propriété  $(*)$  prouve que pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $a_{i,i} \neq 1$  (sans quoi on aurait une égalité absurde). La propriété  $(**)$  prouve alors que  $b_{i,j} = 0$  pour tous  $i \neq j$ . Ainsi,  $B$  est diagonale, et  $AB$  également par voie de conséquence. Par suite,

L'endomorphisme  $f \circ g$  est diagonalisable.

Le spectre de  $f \circ g$  est constitué des éléments diagonaux de  $AB$ , c'est-à-dire des réels  $a_{i,i}b_{i,i}$  sachant que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad a_{i,i}b_{i,i} = a_{i,i} + b_{i,i}$$

Notons alors

$$P = (X - a_{i,i})(X - b_{i,i}) = X^2 - (a_{i,i} + b_{i,i})X + a_{i,i}b_{i,i}$$

Ce polynôme admet deux racines réelles donc son discriminant  $\Delta$  est positif. Or,

$$\Delta = (a_{i,i} + b_{i,i})^2 - 4a_{i,i}b_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}(a_{i,i}b_{i,i} - 4) \geq 0$$

Il s'ensuit que  $a_{i,i}b_{i,i}$  n'est pas compris strictement entre 0 et 4. Au final,

Le spectre de  $f \circ g$  est inclus dans  $\mathbb{R} \setminus ]0; 4[$ .