Problème 2. Les matrices de Kac

21 Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0 \qquad (\mathbf{1})$$

Procédons par récurrence en considérant la propriété

$$\mathscr{P}(k): \quad \forall m \in [\![\, 0\,;k\,]\!] \qquad \lambda_{n-m} = 0$$

que nous allons montrer pour tout $k \in [\![\, 0\,;n\,]\!]$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisqu'en appliquant $(\mathbf{1})$ en 0 on a

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(0) = \lambda_n \underbrace{f_n(0)}_{=1} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \underbrace{f_k(0)}_{=0} = \lambda_n$$

- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$: soit $k \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors, l'équation $(\mathbf{1})$ devient

$$\sum_{m=0}^{n-(k+1)} \lambda_m f_m = 0$$

ou encore, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{k+1}(x) \left(\lambda_{n-(k+1)} \cos^{n-(k+1)}(x) + \sum_{m=0}^{n-(k+2)} \lambda_m \cos^m(x) \sin^{n-(k+1)-m}(x) \right) = 0$$

Ainsi, comme pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$, $\sin(x) \neq 0$ et on a

$$\lambda_{n-(k+1)} \cos^{n-(k+1)}(x) + \sum_{m=0}^{n-(k+2)} \lambda_m \cos^m(x) \sin^{n-(k+1)-m}(x) = 0$$

Par continuité, cette propriété est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. En appliquant en 0,

$$\lambda_{n-(k+1)} = 0$$

On conclut que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : pour tout $k \in [\![\, 0\,;n\,]\!]$, $\lambda_k = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{La famille } (f_0, \dots, f_n) \text{ est libre et } \dim \mathrm{V}_n = n+1.}$$

22 Pour tout $k \in [\![\, 0\,;n\,]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_k{}'(x) = -k \cos^{k-1}(x) \sin^{n-(k-1)}(x) + (n-k) \cos^{k+1}(x) \sin^{n-(k+1)}(x)$$

ou encore $\boxed{\forall k \in [\![\, 0\,;n\,]\!] \qquad f_k{}' = -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1} \in \mathrm{V}_n}$

en posant $f_{-1} = f_{n+1} = 0 \in \mathrm{V}_n$. La dérivation étant une opération linéaire, la fonction φ_n est bien linéaire et à valeurs dans V_n. Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathrm{V}_n.}$$

On reconnaît l'expression de $f_k{}'$ dans les colonnes de la matrice B_n, ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice de } \varphi_n \text{ dans la base } (f_0, \dots, f_n) \text{ est } \mathrm{B}_n.}$$

23 Soit $k \in [\![0\,; n]\!]$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g_k(x) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(2k-n)x} = \mathrm{e}^{\,ikx}\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}(n-k)x} = \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}\right)^k \left(\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}x}\right)^{n-k}$$

soit $\boxed{\forall k \in [\![0\,; n]\!] \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g_k(x) = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^k(\cos(x) - \mathrm{i}\sin(x))^{n-k}}$

24 En appliquant le binôme de Newton à partir du résultat de la question 23, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{i}^{k-j} \cos^j(x) \sin^{k-j}(x)\right) \\ &\qquad \times \left(\sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} (-\mathrm{i})^{n-k-p} \cos^p(x) \sin^{n-k-p}(x)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{p} \mathrm{i}^{n-p-j}(-1)^{n-k-p} \cos^{p+j}(x) \sin^{n-p-j}(x) \\ g_k(x) &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{p} \mathrm{i}^{n-p-j}(-1)^{n-k-p} f_{p+j}(x) \end{aligned}$$

La fonction g_k est donc une combinaison linéaire des f_p. Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall k \in [\![0\,; n]\!] \qquad g_k \in \mathrm{V}_n}$$

25 Soit $k \in [\![0\,; n]\!]$. Par définition, g_k est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad {g_k}'(x) = \mathrm{i}(2k-n)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(2k-n)x}$$

d'où $$\forall k \in [\![0\,; n]\!] \qquad \varphi_n(g_k) = \mathrm{i}(2k-n)g_k$$

Ainsi, les g_k étant non nuls, ils sont tous vecteurs propres de φ_n associés à des valeurs propres différentes. La famille $(g_0, \dots, g_n)$ est donc libre. Ainsi,

> L'endomorphisme φ_n est diagonalisable et $(g_0, \dots, g_n)$ est une base de diagonalisation. De plus
>
> $$\mathrm{sp}_{\,\mathbb{C}}(\varphi_n) = \{\mathrm{i}(2k-n) \mid k \in [\![0\,; n]\!]\}$$
>
> et les espaces propres associés sont respectivement les Vect (g_k).

26 L'endomorphisme φ_n est un automorphisme si et seulement si 0 n'en est pas une valeur propre. La question 25 montrant que ses valeurs propres sont les $\mathrm{i}(2k-n)$, on obtient que φ_n est un automorphisme si et seulement si

$$\forall k \in [\![0\,; n]\!] \qquad 2k - n \neq 0$$

c'est-à-dire

> L'endomorphisme φ_n est un automorphisme de V_n si et seulement si n est impair.

27 Reprenons la formule trouvée en question 24 avec $k = n$:

$$\begin{aligned}
g_n &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-n}\binom{n}{j}\binom{n-n}{p}\,\mathrm{i}^{n-p-j}(-1)^{n-n-p}f_{p+j}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\,\mathrm{i}^{n-j}f_j
\end{aligned}$$

$$\boxed{g_n = \sum_{k=0}^{n} q_k f_k}$$

Or, g_n est un vecteur propre associé à la valeur propre in de φ_n. La matrice B_n étant la matrice de φ_n dans la base $(f_0,\ldots,f_n)$, le vecteur des coordonnées de g_n dans cette base est un vecteur propre de B_n pour cette valeur propre. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}_n - \mathrm{i}n\mathrm{I}_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}}$$

28 La formule du produit de matrices donne pour $(k,\ell)\in [\![\,1\,;p\,]\!]^2$

$$(\mathrm{MD})_{k\ell} = \sum_{j=1}^{p} m_{kj}d_{j\ell}$$

puis, comme D est diagonale, $\boxed{(\mathrm{MD})_{k\ell} = m_{k\ell}d_{\ell\ell}}$

De même $\boxed{(\mathrm{DM})_{k\ell} = d_{kk}m_{k\ell}}$

29 Soit $(k,\ell)\in [\![\,1\,;n+1\,]\!]^2$. Alors, en utilisant la question 28,

$$\begin{aligned}
({\mathrm{D}_n}^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n)_{k\ell} &= (\mathrm{D}_n^{-1}\mathrm{A}_n)_{k\ell}d_{\ell\ell}\\
&= a_{k\ell}\frac{d_{\ell\ell}}{d_{kk}}\\
&= a_{k\ell}\frac{\mathrm{i}^{\ell-1}}{\mathrm{i}^{k-1}}\\
&= a_{k\ell}\mathrm{i}^{\ell-k}\\
({\mathrm{D}_n}^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n)_{kl} &= \begin{cases} k\mathrm{i} & \text{si } \ell = k+1\\ -(n-\ell+1)\mathrm{i} & \text{si } \ell = k-1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{{\mathrm{D}_n}^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n = -\mathrm{i}\mathrm{B}_n}$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{X}) &= \det(\mathrm{X}\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{B}_n)\\
&= \det\big(\mathrm{X}{\mathrm{D}_n}^{-1}\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{D}_n - \mathrm{i}{\mathrm{D}_n}^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n\big)\\
&= \det\big({\mathrm{D}_n}^{-1}(\mathrm{X}\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{i}\mathrm{A}_n)\mathrm{D}_n\big)\\
&= \det(\mathrm{X}\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{i}\mathrm{A}_n)\\
&= \mathrm{i}^{n+1}\det(-\mathrm{i}\mathrm{X}\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{A}_n)\\
\chi_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{X}) &= \mathrm{i}^{n+1}\chi_{\mathrm{A}_n}(-\mathrm{i}\mathrm{X})
\end{aligned}$$

autrement dit $\boxed{\chi_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{X}) = (-\mathrm{i})^{n+1}\chi_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{i}\mathrm{X})}$

> Le résultat de la question 19 est le cas particulier de ce résultat dans le cas $n = 3$.

30 D'après la question 22, B_n est la matrice pour la base $(f_0, \ldots, f_n)$ de l'endomorphisme φ_n. De plus, d'après la question 25, cet endomorphisme φ_n est diagonalisable et ses valeurs propres sont les $\mathrm{i}(2k-n)$ pour $k \in [\![0\,;n]\!]$. Ces valeurs propres sont toutes distinctes et au nombre de $n+1$, la dimension de l'espace V_n. On a donc

$$\chi_{\mathrm{B}_n} = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - \mathrm{i}(2k-n))$$

D'après la question 30, on en déduit

$$\chi_{\mathrm{A}_n} = (-\mathrm{i})^{n+1} \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{iX} - \mathrm{i}(2k-n)) = \prod_{k=0}^{n} (-\mathrm{i})\mathrm{i}(\mathrm{X} - (2k-n)) = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - (2k-n))$$

Ainsi χ_{A_n} est scindé à racines simples et ses racines sont les $(2k-n)$ pour $k \in [\![0\,;n]\!]$. Par suite,

$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A}_n \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les entiers de la forme } 2k-n \text{ pour } k \in [\![0\,;n]\!].}$$

Enfin, $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}_n - n\mathrm{I}_{n+1})$ est de dimension 1 car toutes les valeurs propres sont simples. Il suffit donc de trouver un vecteur propre pour la valeur propre n. D'après la question 27, on a

$$\mathrm{B}_n \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \mathrm{i}n \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

En utilisant le résultat de la question 29, on a

$$\mathrm{i}{\mathrm{D}_n}^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \mathrm{i}n \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{A}_n\mathrm{D}_n \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = n\mathrm{D}_n \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

On vient de trouver un vecteur propre pour la valeur n dont le k-ième coefficient vaut

$$d_{k+1,k+1} q_k = \mathrm{i}^k \mathrm{i}^{n-k} \binom{n}{k} = \mathrm{i}^n \binom{n}{k}$$

C'est un vecteur propre sur $\mathbb{C}$. Toutefois, en divisant par i^n, on en déduit que le vecteur $(p_0, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$ est lui aussi un vecteur propre de A_n pour la valeur propre n.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ (\mathrm{A}_n - n\mathrm{I}_{n+1}) = \mathrm{Vect}\ \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}}$$

31 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire N_k est à valeurs dans l'ensemble $[\![0\,;n]\!]$. Toutes ces possibilités s'excluant les unes les autres,

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{E}_{k,0}, \ldots, \mathrm{E}_{k,n}) \text{ est un système complet d'événements.}}$$

32 Il n'y a que deux possibilités. Soit on choisit une boule dans U_1 pour la mettre dans U_2, soit c'est l'inverse. Ainsi, à chaque étape, une urne gagne une boule, ou en perd une. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{U}_1 \text{ contient } j \text{ boules à l'instant } k\text{, elle en contient soit } j+1\text{, soit } j-1 \text{ à l'étape suivante, tout en restant dans l'intervalle d'entiers } [\![0\,;n]\!].}$$

33 Contrairement à ce qui est écrit dans l'énoncé, mieux vaut traiter les cas $\ell = 0$ et $\ell = n$.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $(j, \ell) \in [\![0\,; n]\!]^2$. Considérons les cas suivants :

- pour $\ell = 0$, si U_1 ne contient aucune boule à l'étape k, alors elle va nécessairement en gagner une à l'étape suivante ;
- pour $\ell = n$, si U_1 contient toutes les boules à l'étape k, alors elle va nécessairement en perdre une à l'étape suivante ;
- pour $\ell \in [\![1\,; n-1]\!]$, si U_1 a ℓ boules à l'étape k, alors elle a ℓ possibilités de perdre une boule à l'étape $k+1$ et $n - \ell$ possibilités d'en gagner une.

On en conclut donc $\boxed{P_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j}) = \begin{cases} \ell/n & \text{si } j = \ell - 1 \\ 1 - \ell/n & \text{si } j = \ell + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

34 D'après les questions 31 et 33 et la formule des probabilités totales, on a

$$\boxed{P(E_{k+1,0}) = \sum_{\ell=0}^{n} P_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,0}) P(E_{k,\ell}) = \frac{1}{n} P(E_{k,1})}$$

où seul le terme de la somme pour $\ell = 1$ est non nul, et

$$\boxed{P(E_{k+1,n}) = \sum_{\ell=0}^{n} P_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,n}) P(E_{k,\ell}) = \frac{1}{n} P(E_{k,n-1})}$$

où seul le terme de la somme pour $\ell = n-1$ est non nul, enfin pour $j \in [\![1\,; n-1]\!]$

$$\boxed{P(E_{k+1,j}) = \sum_{\ell=0}^{n} P_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j}) P(E_{k,\ell}) = \frac{n-j+1}{n} P(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n} P(E_{k,j+1})}$$

35 Montrons que la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \quad Z_k = \frac{1}{n^k} (A_n)^k Z_0$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est trivialement vraie.
- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$: d'après la question 34, pour tout $j \in [\![0\,; n]\!]$,

$$\begin{aligned} p_{k+1,j} &= \frac{1}{n} \left((n - (j-1)) p_{k,j-1} + (j+1) p_{k,j+1} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(a_{j+1,j} p_{k,j-1} + a_{j+1,j+2} p_{k,j+1} \right) \\ p_{k+1,j} &= \frac{1}{n} (A_n Z_k)_j \end{aligned}$$

Attention ! On doit mettre les indices $j+1, j$ et $j+1, j+2$ car le sujet à choisi d'indicer les matrices sur $[\![1\,; n+1]\!]$ et les vecteurs sur $[\![0\,; n]\!]$, ce qui peut être perturbant.

Par conséquent, $\qquad Z_{k+1} = \dfrac{1}{n} A_n Z_k$

Puis d'après $\mathscr{P}(k)$,

$$Z_{k+1} = \frac{1}{n} A_n \left((A_n)^k Z_0 \right) = \frac{1}{n^{k+1}} (A_n)^{k+1} Z_0$$

- Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad Z_k = \frac{1}{n^k} (A_n)^k Z_0}$

36 Par hypothèse du sujet, N_0 est le nombre de succès obtenus après n expériences de Bernoulli indépendantes et de paramètre 1/2. Ainsi,

$$\boxed{\text{La loi } \pi \text{ de } N_0 \text{ est une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}.}$$

37 D'après la question 36, on a

$$Z_0 = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, d'après la question 30, Z_0 est un vecteur propre de A_n pour la valeur propre n. Par suite, on obtient par récurrence immédiate

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (A_n)^k Z_0 = n^k Z_0$$

puis d'après la question 35, $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad Z_k = Z_0$

autrement dit $\qquad$ $\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ N_k \text{ et } N_0 \text{ ont la même loi.}}$

38 Soit π' une loi de probabilité telle que si N_0 suit cette loi, alors pour tout entier naturel k, la variable N_k a pour loi de probabilité π'. Soit Z le vecteur associé à cette loi de probabilité. Alors, d'après la question 35, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad Z = \frac{1}{n^k} (A_n)^k Z$$

en particulier pour $k = 1$ $\qquad Z = \frac{1}{n} A_n Z$

Ainsi Z est un vecteur propre de A_n pour la valeur propre n. D'après la question 30, on a $Z \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(Z_0)$. Soit donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $Z = aZ_0$. En particulier

$$Z = a \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

La définition d'une loi de probabilité donne alors

$$1 = a \sum_{k=0}^{n} p_k = a$$

Finalement, $\qquad Z = Z_0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La loi } \pi \text{ est l'unique loi telle que si } N_0 \text{ suit } \pi, \text{ alors} \\ \text{toutes les variables } N_k \text{ ont pour loi de probabilité } \pi.\end{array}}$$