

Matrices de Hurwitz

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans $\mathbf{K}$ et pour une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- $\mathbf{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
- $\text{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \text{Re}(z) < 0\}$.
- On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée :

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

- On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$

avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

- Pour $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on notera son conjugué $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$, sa partie réelle $\text{Re}(X) = \frac{X + \overline{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\text{Im}(X) = \frac{X - \overline{X}}{2i}$.
- Si $M \in M_n(\mathbf{R})$, l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (respectivement $\mathbf{C}^n$) canoniquement associé à M est

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \rightarrow & \mathbf{R}^n \\ X & \mapsto & M X \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} \text{respectivement} & \mathbf{C}^n & \rightarrow & \mathbf{C}^n \\ & X & \mapsto & M X \end{array} \right)$$

Rappels

- 1) Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{K})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{K})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{C})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
- 2) Soient R et S deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$. R est un diviseur de S s'il existe un polynôme Q de $\mathbf{K}[X]$ tel que $S = QR$.

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Objectifs

- Il s'agit d'établir pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une équivalence entre des propriétés qualitatives des solutions et des conditions portant sur la nature de la matrice associée à ce système et de son polynôme caractéristique.
- La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
- La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.
- La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
- Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.
- La partie 4, sur l'équivalence annoncée pour les systèmes différentiels, utilise des résultats des parties 1 et 3.

1 Matrices semi-simples

Définition 1 Une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est dite **semi-simple** si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.

Définition 2 Une matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ est dite **presque diagonale** s'il existe :

- i) deux entiers naturels p et q ;
- ii) q réels $a_1, a_2, \dots, a_q$;
- iii) q réels non nuls $b_1, b_2, \dots, b_q$;
- iv) une matrice D diagonale de $M_p(\mathbf{R})$ tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

où, $\forall j \in \llbracket 1 ; q \rrbracket : M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M . De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Soit A la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1 ▷ La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2 ▷ Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $M_2(\mathbf{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B , introduire les vecteurs $W_1 = \operatorname{Re}(V)$ et $W_2 = \operatorname{Im}(V)$.

Soit M une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.

On suppose dans la question 3) seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\bar{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

3 ▷ Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbf{R})$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

4 ▷ Démontrer que M est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) M est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$;

ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

5 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

6 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbf{C}[X]$, en précisant dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbf{R})$ à une matrice presque diagonale.

2 Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E .

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Soit F un sous-espace vectoriel de E , différent de $\{0_E\}$ et de E .

- 7** ▷ Démontrer qu'il existe $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe.

On note alors

$$\mathcal{A} = \left\{ H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\} \right\}$$

et

$$\mathcal{L} = \left\{ p \in \mathbf{N}^* \mid \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H) \right\}.$$

- 8** ▷ Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r .
- 9** ▷ Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E , stable par u .
- 10** ▷ On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E , stable par u . Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n - 1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u .