

Stabilité d'un polynôme trigonométrique

Définition 1. On appelle polynôme trigonométrique toute fonction c de la variable réelle x de la forme

$$c(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

où les c_n sont des nombres complexes, tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On appelle degré de c , noté $\deg c$, le plus petit entier K tel que $c_j = 0$ pour tout $|j| > K$.

On désigne par E l'ensemble des polynômes trigonométriques ; on tiendra pour acquis que E est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel stable par la multiplication des fonctions.

Pour un nombre complexe z , $\Re(z)$ représente sa partie réelle et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

I Stabilité d'un polynôme trigonométrique

1. Montrer que l'on définit une norme sur E en posant

$$\|c\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$$

pour tout $c \in E$.

2. Soit $c \in E$, établir pour tout entier p de $\{-\deg c, \dots, \deg c\}$, l'identité

$$c_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(x) e^{-ipx} dx.$$

3. Montrer que pour tout $c \in E$, on a

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |c(x)| \leq \|c\| \leq (2 \deg c + 1) \sup_{x \in \mathbf{R}} |c(x)|.$$

Définition 2. On dira que le polynôme trigonométrique c est stable lorsque la suite $\|c^k\|$ des normes de ses puissances successives est bornée quand k décrit $\mathbf{N}$.

4. Montrer que s'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $|c(x_0)| > 1$ alors c n'est pas stable.

Le but de la suite de ce problème est de montrer que la condition $|c(x)| \leq 1$ pour tout réel x n'est pas suffisante pour que c soit stable.

II Un polynôme trigonométrique particulier

Dorénavant, α désigne une constante réelle telle que $0 < \alpha < 1$ et a désigne le polynôme trigonométrique

$$a(x) = \alpha^2 \cos x - i\alpha \sin x + 1 - \alpha^2.$$

Pour tout entier $k \geq 2$, on note $a_{k,n}$ les nombres complexes tels que la puissance k -ième de $a(x)$ s'écrive

$$a^k(x) = \sum_{n=-k}^k a_{k,n} e^{inx}.$$

5. Établir, pour tout réel x , l'identité

$$|a(x)|^2 = 1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4) \sin^4 \frac{x}{2}.$$

En déduire que a vérifie les propriétés $a(0) = 1$ et $|a(x)| < 1$ pour tout x appartenant à $]0, \pi]$.

6. Donner les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions g et h définies par

$$g(x) = \ln(|a(x)|^2) \text{ et } h(x) = \arctan \left(\frac{\Im(a(x))}{\Re(a(x))} \right).$$

7. En déduire que l'on a, au voisinage de 0, la relation suivante :

$$a(x) = \exp \left(-i\alpha x + i \frac{\alpha - \alpha^3}{6} x^3 - \frac{\alpha^2 - \alpha^4}{8} x^4 + o(x^4) \right).$$

Il existe donc trois réels α , β et γ strictement positifs et une fonction $\varepsilon : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$, tendant vers 0 quand x tend vers 0 tels que l'on ait, pour tout x dans un voisinage de 0,

$$a(x) = \exp \left(-i\alpha x + i\beta x^3 - \gamma x^4 (1 + \varepsilon(x)) \right).$$

On admet que la fonction ε est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$. Dans toute la suite, on posera

$$d(x) = \exp \left(-i\alpha x + i\beta x^3 \right) \text{ et } b(x) = \exp \left(-\gamma x^4 (1 + \varepsilon(x)) \right),$$

de sorte que $a(x) = d(x)b(x)$ et $|a(x)| = |b(x)|$.

III Majoration des coefficients de a^k

Soit $[r, s]$ un segment de longueur non nulle de $\mathbf{R}$, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que $|f'(t)| \geq K$ pour tout $t \in [r, s]$ et que de plus $f''(t) \geq 0$ pour tout $t \in [r, s]$.

8. Montrer l'inégalité

$$\left| \int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} dt \right| \leq \frac{2}{K}.$$

9. En intégrant par parties l'intégrale

$$\int_r^s \frac{1}{f'(t)} \left(f'(t) \cos f(t) \right) dt,$$

établir que

$$\left| \int_r^s \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{K}.$$

Dans les questions 10 à 12, $[u, v]$ désigne un segment de longueur non nulle de $\mathbf{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[u, v]$, à valeurs réelles. On suppose cette fois que $f''(t) \geq M > 0$ pour tout t appartenant à $[u, v]$.

10. On suppose que $f'(u) \geq 0$. Établir, sur $[u + 2/\sqrt{M}, v]$, l'inégalité suivante

$$f'(t) \geq 2\sqrt{M}.$$

11. En déduire que

$$\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}.$$

On admettra que le résultat est identique lorsque $f'(v) \leq 0$.

12. On suppose que $f'(u)f'(v) < 0$. Montrer qu'il existe un unique réel w de $]u, v[$ tel que $f'(w) = 0$. En déduire que

$$\left| \int_u^v \cos f(t) dt \right| \leq \frac{8}{\sqrt{M}}.$$

Dans les questions 13 et 14, ζ désigne un nombre réel, k un entier naturel non nul et $J_{k,\zeta}$ la fonction définie par

$$J_{k,\zeta}(x) = \int_0^x \cos(\zeta t + k\beta t^3) dt,$$

où β est le nombre réel non nul défini après la question 7.

13. Montrer, pour tout x appartenant à $[k^{-1/3}, \pi]$, l'inégalité :

$$\left| \int_{k^{-1/3}}^x \cos(\zeta t + k\beta t^3) dt \right| \leq \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6}\beta}.$$

14. En déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$, indépendante de ζ et k , telle que pour tout x de $[0, \pi]$ on ait la relation

$$|J_{k,\zeta}(x)| \leq C_1 k^{-1/3}.$$

On admet que l'on peut démontrer de la même manière qu'il existe une constante C_2 , indépendante de k et ζ , telle que pour tout x de $[0, \pi]$ on ait la relation suivante :

$$\left| \int_0^x \sin(\zeta t + k\beta t^3) dt \right| \leq C_2 k^{-1/3}. \quad (1)$$

15. Montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout x de $[-\pi, \pi]$, on ait

$$|b(x)| \leq \exp(-\lambda x^4).$$

16. Montrer qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout x de $[-\pi, \pi]$, on ait

$$|b'(x)| \leq C_3 |x^3|.$$

17. À l'aide d'une intégration par parties et en utilisant les résultats précédents, montrer qu'il existe une constante C_4 indépendante de n et de k telle que pour tout entier non nul k et pour tout entier relatif n , on ait l'inégalité :

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\alpha k+n}(x) (b(x))^k dx \right| \leq C_4 k^{-1/3}.$$

18. En déduire qu'il existe une constante $C_5 > 0$ indépendante de k et n telle que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $n \in \{-k, \dots, k\}$, on ait l'inégalité

$$|a_{k,n}| \leq C_5 k^{-1/3}.$$

On admet dorénavant l'existence d'une constante $C_6 > 0$ telle que, pour tout entier k non nul,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a(x)|^{2k} dx \geq C_6 k^{-1/4}.$$

19. Montrer qu'il existe $C_7 > 0$ tel que, pour tout entier k ,

$$\|a^k\| \geq C_7 k^{1/12},$$

c'est-à-dire que a n'est pas stable !

FIN DU PROBLÈME

INDICATIONS

Première partie

- 3 Utiliser le résultat de la question 2.
 4 Montrer que $\|c^k\| \geq |c(x_0)|^k$ à l'aide de la question 3.

Deuxième partie

- 5 Utiliser les formules trigonométriques de l'angle moitié.
 6 Les formules à établir sont

$$g(x) = -\frac{\alpha^2 - \alpha^4}{4} x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad h(x) = -\alpha x + \frac{\alpha - \alpha^3}{6} x^3 + o(x^4)$$

La fonction h est impaire ; les termes non nuls de ses développements à l'ordre 3 et à l'ordre 4 sont les mêmes. On se contentera donc de développer h à l'ordre 3, ce qui simplifie les calculs.

- 7 Si $z \in \mathbb{C}$ est de partie réelle strictement positive, on peut écrire

$$z = |z| \exp \left(i \operatorname{Arctan} \frac{\Im(z)}{\Re(z)} \right) = \exp \left(\frac{\ln |z|^2}{2} + i \operatorname{Arctan} \frac{\Im(z)}{\Re(z)} \right)$$

Justifier que $\Re(a(x)) > 0$ au voisinage de 0.

Troisième partie

- 10 Utiliser le fait que $f'(t) = f'(u) + \int_u^t f''(s) \, ds$.
 11 On estimera séparément chacune des intégrales
- $$\int_u^{u+2M^{-1/2}} \cos f(t) \, dt \quad \text{et} \quad \int_{u+2M^{-1/2}}^v \cos f(t) \, dt$$
- 12 Majorer $\left| \int_u^w \cos f(t) \, dt \right|$ et $\left| \int_w^v \cos f(t) \, dt \right|$ en utilisant la question 11 et le fait que $f'(w)$ est à la fois positif et négatif.
 13 Minorer f'' par $6k^{2/3}\beta$ sur $[k^{-1/3}; \pi]$. Conclure à l'aide des questions 11 et 12.
 14 Il ne reste qu'à étudier le cas où $x \in [0; k^{-1/3}]$.
 15 On rappelle que $|b(x)| = |a(x)|$. Utiliser les estimations classiques

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad |\sin x| \geq \frac{2|x|}{\pi}$$

$$\text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - x \leq e^{-x}$$

pour majorer d'abord $|b(x)|^2$.

- 17 Démontrer le résultat plus général : il existe $C_4 > 0$ tel que

$$\forall \zeta \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \left| \int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\zeta}(x) b(x)^k \, dx \right| \leq C_4 k^{-1/3}$$

en procédant à une intégration par parties, comme le propose l'énoncé. Majorer b et b' à l'aide des questions 15 et 16.

18 Il est nécessaire d'admettre que

$$\forall \zeta \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\zeta x + k\beta x^3) b(x)^k dx \right| \leq C_4 k^{-1/3}$$

Utiliser la question 2 et le fait que $a(x) = b(x)d(x)$ pour obtenir

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(\zeta x + k\beta x^3) + i \sin(\zeta x + k\beta x^3)) b(x)^k dx$$

19 Justifier que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{k,n}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x)|^2 dx$.

Minorer $|a_{k,n}|$ à l'aide de l'identité $|a_{k,n}| = \frac{|a_{k,n}|^2}{|a_{k,n}|}$ et de la question 18. Conclure en utilisant le dernier résultat admis par l'énoncé.