

Problème 1. AUTOUR DE LA FONCTION SINUS CARDINAL

1 Considérons la fonction $u: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t - \sin t \end{cases}$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$u'(t) = 1 - \cos t \geqslant 0$$

La fonction u est donc croissante. Or $u(0) = 0$ donc pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a $u(t) \geqslant 0$, puis

$$t \geqslant \sin t$$

Soit maintenant la fonction $v: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t + \sin t \end{cases}$

dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$v'(t) = 1 + \cos t \geqslant 0$$

La fonction v est donc croissante. Or $v(0) = 0$ donc pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a $v(t) \geqslant 0$, puis

$$t \geqslant -\sin t$$

En réunissant les deux inégalités obtenues, on obtient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad t \geqslant |\sin t|}$$

2 Notons $f(x, t)$, $g(x, t)$ et $h(x, t)$ les intégrandes respectifs de $F(x)$, $G(x)$ et $H(x)$. Par composition et produit, ces fonctions sont continues sur $]0; +\infty[$ en chacune de leurs variables. De plus, d'après la question 1, pour tous $x, t > 0$

$$|f(x, t)| \leqslant e^{-tx}$$

On a aussi $|g(x, t)| \leqslant e^{-tx}$ et $|h(x, t)| \leqslant e^{-tx}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x, t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right) \quad g(x, t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right) \quad h(x, t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann,

$$\boxed{\text{Les fonctions } F, G \text{ et } H \text{ sont bien définies sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

3 Fixons $x > 0$. Pour tout $t > 0$, d'après la question 1, on a

$$\left| \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \right| \leqslant e^{-tx}$$

La fonction $t \mapsto e^{-tx}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par le même argument qu'en question 2, par croissance de l'intégrale, on a

$$|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \right| dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-tx} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

La valeur absolue étant positive, on en déduit par encadrement que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0}$$

4 La fonction
$$f: \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition en tant que multiplication de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tous $x, t > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-tx} \sin t = -g(x, t)$$

Cette fonction est continue par rapport à chacune de ses variables. De plus, on a

$$\forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-tx}$$

Par croissance de l'exponentielle, on obtient donc l'hypothèse de domination

$$\forall a > 0 \quad \forall x > a \quad \forall t > 0 \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-ta}$$

Toutes les hypothèses du théorème de dérivation sont donc vérifiées pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in]a; +\infty[$. Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a; +\infty[$ et

$$\forall x \in]a; +\infty[\quad F'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-tx} \sin t \, dt = -G(x)$$

Le résultat étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F' = -G$.

5 On a pour tout $x > 0$,

$$H(x) + iG(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} (\cos t + i \sin t) \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(x-i)} \, dt$$

Le module de l'intégrande est e^{-tx} qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrande est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et une de ses primitives est la fonction

$$t \mapsto -\frac{1}{x-i} e^{-t(x-i)}$$

qui est bien définie car $x \in \mathbb{R}_+^*$ et en particulier $x \neq i$. On en déduit

$$H(x) + iG(x) = \left[\frac{1}{i-x} e^{-t(x-i)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}$$

Ainsi, en prenant les parties imaginaire et réelle on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad G(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{et} \quad H(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Soit $\alpha > 0$. En faisant un changement de variable linéaire de coefficient directeur non nul $u = \alpha t$, on obtient que pour tout $x > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) \, dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\alpha} u} \cos u \, du = \frac{1}{\alpha} H\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Par conséquent
$$\forall (\alpha, x) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) \, dt = \frac{x}{x^2 + \alpha^2}$$

6 La fonction G admet Arctan comme primitive. En appliquant la question 4, on conclut à l'existence d'une constante c telle que

$$\forall x > 0 \quad F(x) = c - \text{Arctan } x$$

Or
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan } x = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, en appliquant la question 3, on obtient $c = \pi/2$, soit encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x = \text{Arctan } \frac{1}{x}$$

En particulier,

$$F(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

La transformée de Laplace $\mathcal{L}$ a de jolies propriétés. Par exemple, elle se comporte très bien avec la dérivée ou le produit de convolution. Sous les hypothèses adéquates, on a en effet :

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

De plus, associée à la transformée de Borel, elle permet d'attribuer un sens à certaines séries divergentes. Néanmoins, toutes les propriétés de la somme usuelle ne sont pas conservées.

7

La question, telle que posée dans le sujet, est fautive. En effet prenons $t = 2^n \pi$ pour un entier n non nul quelconque. Alors

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \cos(2^{n-k}\pi) = -1$$

D'autre part $\sin(2^n \pi) = 0$ car $n > 0$. Pour autant $\sin(t/2^n) = \sin \pi = 0$. Pour que cela soit vrai il faudrait poser la convention $0/0 = -1$. D'autre part

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \cos(2^{n-k}\pi) = 1$$

La convention à poser est alors $0/0 = 1$. Ce conflit de convention ne permet pas de conclure pour tout t . Il faut donc que $t/2^n$ soit différent de $k\pi$ pour tout entier relatif k , ce qui est le cas pour n assez grand. On se propose donc de montrer le résultat suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2^n k\pi \mid n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{2^n \sin(t/2^n)}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in 2\mathbb{Z}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{2^n \sin(t/2^n)}$$

Enfin pour $t > 0$ de la forme $k\pi$ avec k pair, on montre que le résultat est vrai pour n assez grand.

Fixons $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in 2\mathbb{Z}\}$. Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{2^n \sin(t/2^n)}$$

est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{P}(1)$: Rappelons l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$$

en particulier $2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sin t$

ou encore $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin t}{2 \sin(t/2)}$

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: On a

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \\ &= \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{\sin t}{2^n \sin(t/2^n)} \quad (\text{d'après } \mathcal{P}(n)) \\ &= \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{\sin t}{2^n \times 2 \cos(t/2^{n+1}) \sin(t/2^{n+1})} \\ \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \frac{\sin t}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)} \end{aligned}$$

- Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in 2\mathbb{Z}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{2^n \sin(t/2^n)}}$$

Soit maintenant $t = k\pi$ avec k pair. On écrit $t = 2^{n_0-1}k'\pi$ avec k' impair. Alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$\cos\left(\frac{t}{2^{n_0}}\right) = \cos\left(k' \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

est un élément du produit $\prod_{k=1}^n \cos(t/2^k)$, qui est donc nul. D'autre part, $\sin t = 0$ et $\sin(t/2^n)$ est non nul. Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \geq n_0 \implies \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{2^n \sin(t/2^n)}}$$

8 Soit $t > 0$. Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{P}(1)$: On a bien $\frac{1}{2^0} \sum_{k=1}^{2^0} \cos\left(\frac{2k-1}{2^1} t\right) = \cos\left(\frac{1}{2} t\right)$

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: On a

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

Ainsi, d'après $\mathcal{P}(n)$,

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$$

En utilisant l'indication,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t + \frac{t}{2^{n+1}}\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t - \frac{t}{2^{n+1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}}t\right) + \cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}}t\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}}t\right) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}}t\right) \\ \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\ell \in L} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}}t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad L &= \{\ell \mid \exists k \in \llbracket 1; 2^{n-1} \rrbracket \quad \ell = 4k-1 \vee \ell = 4k-3\} \\ &= \{\ell \in \llbracket 1; 2^{n+1} \rrbracket \mid \ell \equiv -1 \pmod{4} \vee \ell \equiv -3 \pmod{4}\} \\ &= \{\ell \in \llbracket 1; 2^{n+1} \rrbracket \mid \ell \in 2\mathbb{N}-1\} \\ L &= \{\ell \mid \exists k \in \llbracket 1; 2^n \rrbracket \quad \ell = 2k-1\} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement} \quad \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}t\right)$$

- Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$$

9 Soit $t > 0$. Pour n assez grand, les questions 7 et 8 donnent

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) = \frac{\sin t}{2^n \sin(t/2^n)}$$

$$\text{Or} \quad 2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} t$$

Donc, comme t est non nul, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin t}{2^n \sin(t/2^n)} = \frac{\sin t}{t}$$

ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) = \frac{\sin t}{t}$$

La parité des fonctions $\cos$ et $t \mapsto (\sin t)/t$ permet même de conclure que le résultat est vrai pour tout réel $t \in \mathbb{R}^*$. Écrivez sous la forme suggérée par la question 8, le résultat précédent s'écrit alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{t}$$

Appliqué en $t = \pi/2$, on obtient

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = \frac{2}{\pi}$$

De plus, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

Comme $\cos(\pi/2) = 1$, on obtient par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}_{k \text{ occurrences du symbole } \sqrt{}}$$

On obtient alors la formule de Viète :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \dots$$

10 Fixons $x > 0$. D'après le résultat de la question 9, la suite de fonctions définie dans l'indication de l'énoncé converge simplement vers la fonction intégrande de F . Ces fonctions sont continues et l'intégrande de F est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, en appliquant l'inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 1 = 1$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t > 0 \quad |f_n(t)| \leq e^{-tx}$

On a donc l'hypothèse de domination avec $t \mapsto e^{-tx}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx} dt$$

11 En utilisant les questions 6 et 10, on a

$$\frac{\pi}{4} = F(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-t} dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; 2^n \rrbracket$. Via le changement de variable $u = ((2k-1)/2^n)t$, linéaire de coefficient directeur non nul, donc licite, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-t} dt &= \frac{2^n}{2k-1} \int_0^{+\infty} \cos(u) e^{-\frac{2^n}{2k-1}u} du \\
&= \frac{2^n}{2k-1} \operatorname{H}\left(\frac{2^n}{2k-1}\right) \\
&= \left(\frac{2^n}{2k-1}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{2^n}{2k-1}\right)^2 + 1} \quad (\text{question 5})
\end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-t} dt = \frac{2^{2n}}{2^{2n} + (2k-1)^2}$$

Ainsi,

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2^{2n}}{2^{2n} + (2k-1)^2}$$

ou encore

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{2n} + (2k-1)^2}$$

12 On a pour tout entier n non nul,

$$\begin{aligned}
2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} &= 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{\left(\frac{2k}{2^n}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2 + 1} \\
2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} G\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) \quad (\text{question 5})
\end{aligned}$$

On reconnaît ici une somme de Riemann associée à la fonction continue G pour la subdivision $(0, 1/2^{n-1}, \dots, 1)$.

Ici, on n'utilise pas la subdivision usuelle, régulière de pas $1/n$. On ne fait que changer le pas.

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \int_0^1 G(t) dt$$

La question 4 a montré que $-F$ est une primitive de G . De plus F tend vers $\pi/2$ en 0 d'après la formule démontrée en question 6. Puisque l'on a aussi $F(1) = \pi/4$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = [-F(t)]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{\pi}{4}$$

13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; 2^{n-1} \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| &= \left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \right| \times \left| 1 - \frac{4k^2 + 2^{2n}}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \\ &= \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \left| \frac{-4k+1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \\ \left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| &= \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \frac{|-4k+1|}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \end{aligned}$$

Or $k \geq 0$, il s'ensuit $2k-1 \geq 1$. De plus, en appliquant l'inégalité triangulaire au numérateur,

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leq \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \frac{4k+1}{1+2^{2n}}$$

Enfin, remarquant que $k \leq 2^{n-1}$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \llbracket 0; 2^n \rrbracket \quad \left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leq \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}}}$$

14 On a, par l'inégalité triangulaire et le résultat de la question 13,

$$\begin{aligned} \left| 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) \right| &\leq 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \\ &\leq 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \\ \left| 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) \right| &\leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \end{aligned}$$

Or par la question 12,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{\pi}{4}$$

De plus
$$\frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{2^{2n}} = 2^{-n+1}$$

puis
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} = 0$$

Ainsi, par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) \right| = 0$$

ou encore
$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0}$$

Ensuite, par somme de limites, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} = \frac{\pi}{4}}$$

ce qui est le résultat obtenu en question 11.

PROBLÈME 1

I. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS f_α

6 On rappelle que le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est par définition

$$R = \sup \{ \rho \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \}$$

La borne supérieure est prise dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Prenons un réel $x \in]0; 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{x^n}{n^\alpha} = \exp(n \ln x - \alpha \ln n) = \exp\left(n \left(\ln x - \alpha \frac{\ln n}{n}\right)\right)$$

Par croissances comparées, on sait que $\ln n/n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Comme de plus on a $\ln x < 0$, il suit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln x - \alpha \frac{\ln n}{n}\right) = -\infty$$

Par composition de limite avec la fonction $\exp$, on en déduit que la suite $(x^n/n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Elle est en particulier bornée. Cela montre que $R \geq x$. En passant à la limite lorsque $x \rightarrow 1^-$, on établit que $R \geq 1$.

Traisons maintenant le cas où $x > 1$. Cette fois, $\ln x > 0$. Les raisonnements précédents donnent que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln x - \alpha \frac{\ln n}{n}\right) = +\infty$$

Par composition de limite, la suite $(x^n/n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ et par conséquent n'est pas bornée, ce qui implique que $R \leq x$. Ceci valant pour tout $x > 1$, on obtient que $R \leq 1$ par un passage à la limite.

Remarquons au passage que la nature de la suite $(x^n/n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en $x = 1$ nous est inconnue. Tout dépend du paramètre α . Lorsque $\alpha > 0$, cette suite converge vers 0. Lorsque $\alpha = 0$, elle est constante égale à 1, enfin dans le cas où $\alpha < 0$, elle diverge vers $+\infty$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est $R = 1$.

On peut également résoudre cette question en utilisant la règle de d'Alembert, ce que l'on fait au paragraphe suivant. Dans une épreuve en temps limité, cette approche est préférable lorsqu'elle est possible. Mais la règle de d'Alembert ne marche pas à tous les coups, dans ces cas-là les raisonnements nécessitent de bien comprendre ce qu'est un rayon de convergence.

Pour tout $x > 0$, posons la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n(x) = x^n/n^\alpha$. Alors

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)^\alpha}{x^n/n^\alpha} \right| = |x| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$$

Dans le cas où $|x| < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x) = \sum_{n \geq 1} x^n/n^\alpha$ converge, et dans le cas où $|x| > 1$, elle diverge (grossièrement). On conclut alors que $R = 1$.

7 D'après la question précédente $] -1; 1[\subset \mathcal{D}_\alpha$, et ce quelle que soit la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$. Il faut à présent étudier la convergence de f_α au bord du domaine de convergence. Divers cas se présentent.

- Cas où $\alpha \leq 0$: prenons un réel $x \in \{-1, 1\}$. Alors la suite dont le terme général est $|x^n/n^\alpha| = 1/n^\alpha$ ne tend pas vers 0. Il en résulte que la série $\sum_{n \geq 1} x^n/n^\alpha$ diverge grossièrement.
- Cas où $\alpha \in]0; 1[$: d'après le critère de Riemann, la série numérique $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$ est divergente, autrement dit $1 \notin \mathcal{D}_\alpha$. Par ailleurs, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n^\alpha$ vérifie le critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $(1/n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle. Par ce théorème, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n^\alpha$ est convergente.
- Cas où $\alpha > 1$: quel que soit $x \in \{-1, 1\}$, on a la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| \frac{x^n}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

D'après le critère de Riemann, la série $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$ est cette fois convergente, d'où l'on déduit par domination que $\sum_{n \geq 1} x^n/n^\alpha$ converge absolument, donc converge.

En résumé,

$$\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases}] -1; 1[& \text{si } \alpha \leq 0 \\ [-1; 1[& \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \\ [-1; 1] & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

8 On observe d'abord que $f_\alpha(0) = 0$. Maintenant, fixons un $x \in \mathcal{D}_\alpha \cap \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

est positif en tant que série à termes positifs. En revanche, si $x \in \mathcal{D}_\alpha \cap \mathbb{R}_-^* = [-1; 0[$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n |x|^n}{n^\alpha}$$

est une série alternée qui vérifie les hypothèses du théorème spécial. En effet, la suite de terme général $|x|^n/n^\alpha$ est décroissante (en tant que produit terme à terme des deux suites $(|x|^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(n^{-\alpha})_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissantes positives) et de limite nulle. Dans ce cas, le signe de la série de somme $f_\alpha(x)$ est celui de son premier terme, qui est $x < 0$.

La fonction f est strictement négative sur $[-1; 0[$, nulle en 0 et strictement positive sur $\mathcal{D}_\alpha \cap \mathbb{R}_+^*$.

9 Il s'agit de séries entières classiques. Pour $x \in] -1; 1[$, la série entière de somme $f_0(x)$ est une série géométrique de raison x

$$\forall x \in] -1; 1[\quad f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Toujours pour $x \in] -1; 1[$,

$$f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

On reconnaît une dérivée terme à terme d'une série géométrique, ce qui permet de poursuivre ainsi

$$f_{-1}(x) = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = x \frac{d}{dx} \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Enfin, occupons-nous de la fonction f_1 . À quelques changements près, on reconnaît le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$.

$$\forall x \in [-1; 1[\quad f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n} = -\ln(1-x)$$

La convergence d'une série entière au bord de son domaine de convergence est à la limite du programme de PSI. Dans le cas présent, la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ en $x = -1$ n'est pas un résultat de cours. Il est peu probable que les concepteurs du sujet aient voulu piéger les candidats sur cette question, qui avait vraisemblablement vocation à tester leurs connaissances sur les développements en série entière classiques. Néanmoins, on peut montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge effectivement, et que sa somme est $-\ln 2$.

La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; 1]$, et une récurrence facile permet de calculer ses dérivées

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0; 1] \quad \frac{d^k \ln(1+t)}{dt^k} = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+t)^k}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée entre les points 0 et 1 à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ donne

$$\begin{aligned} \ln(2) &= \ln(1) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+t)^{n+1}} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n} dt \end{aligned}$$

Le reste intégral peut être majoré en valeur absolue par

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n} dt \right| \leq \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, on en déduit qu'il tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ensuite, un passage à la limite dans la formule de Taylor donne le développement de $\ln 2$

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

En conclusion,

$$\text{Pour tout } x \in]-1; 1[, \text{ on a } f_0(x) = \frac{x}{1-x} \text{ et } f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Pour tout } x \in [-1; 1[, \text{ on a l'expression } f_{-1}(x) = -\ln(1-x).$$

10 Par des arguments généraux sur les séries entières, on sait que la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est continue, et même de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur son intervalle ouvert de convergence $] -1 ; 1 [$. Ici, on cherche à établir la continuité au bord du domaine et il faut utiliser un autre argument.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_n : [-1 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^n/n^\alpha$. Les fonctions φ_n sont continues, bornées et vérifient $\|\varphi\|_\infty = 1/n^\alpha$. Comme $\alpha > 1$ par hypothèse, la série $\sum_{n \geq 1} \|\varphi\|_\infty$ converge par le critère de Riemann. Il en découle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \varphi_n$, de somme f_α , converge normalement. Par suite,

La fonction f_α est continue sur $[-1 ; 1]$.

11 Comme $\alpha \leq 1$, on a $n^\alpha \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En passant à l'inverse, on obtient donc $1/n^\alpha \geq 1/n$. Si $x \in [0 ; 1[$, alors

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = f_1(x) = -\ln(1-x)$$

Or $\lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(1-x) = +\infty$. Par minoration, il s'ensuit que

Pour tout $\alpha \leq 1$, la fonction f_α tend vers $+\infty$ en 1^- .

12 Toute fonction génératrice est définie au point 1, ce qui impose $\alpha > 1$ en vertu du résultat de la question 7. On a alors

$$G_\alpha(1) = \lambda f_\alpha(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_\alpha = n) = P(X_\alpha \in \mathbb{N}) = 1$$

Il vient alors que $\lambda = 1/f_\alpha(1)$.

$$\alpha > 1 \text{ et } \lambda = \frac{1}{f_\alpha(1)}$$

13 Rappelons que la variable aléatoire X_α admet une espérance si et seulement si sa fonction génératrice G_α est définie et dérivable en 1, auquel cas $E(X_\alpha) = G'_\alpha(1)$. La dérivabilité de G_α est équivalente à celle de f_α . On sait déjà que

$$\forall x \in]-1 ; 1[\setminus \{0\} \quad f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha-1}} = \frac{f_{\alpha-1}(x)}{x}$$

Malheureusement, le théorème de dérivation terme à terme des séries entières ne permet que de dériver sur le disque ouvert de convergence, ici $] -1 ; 1 [$, et non sur le bord. C'est la principale difficulté de cette question.

Traisons les différents cas suivants.

- Cas où $\alpha \leq 1$: d'après la question 12, la fonction G_α n'est pas définie en 1.
- Cas où $1 < \alpha \leq 2$: la fonction f_α est continue sur $] 0 ; 1 [$ par la question 10, et dérivable sur $] 0 ; 1 [$. De plus, comme $\alpha - 1 \leq 1$, il suit de la question 11 que

$$f'_\alpha(x) = \frac{f_{\alpha-1}(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$$

Le théorème de la limite de la dérivée assure alors que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f_\alpha(1) - f_\alpha(x)}{1 - x} = +\infty$$

ce qui empêche f_α d'être dérivable en 1.

- Cas où $\alpha > 2$: pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto x^n/n^\alpha$. Par la question 7, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \varphi_n$ converge vers f_α sur $[-1; 1]$. En outre les fonctions φ_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $\|\varphi'_n\|_\infty = 1/n^{\alpha-1}$. Or $\alpha - 1 > 1$ et ainsi la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \varphi'_n$ converge normalement par le critère de Riemann. Par un théorème du cours, cela implique que f_α est dérivable sur $[-1; 1]$ et $f'_\alpha = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \varphi'_n$. En particulier,

$$f'_\alpha(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = f_{\alpha-1}(1)$$

La variable aléatoire X_α admet une espérance si et seulement si $\alpha > 2$, et dans ce cas, $E(X_\alpha) = \frac{f_{\alpha-1}(1)}{f_\alpha(1)}$.

II. UN LOGARITHME COMPLEXE

- 14** On rappelle le développement en série entière suivant.

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

- 15** Cette question ressemble à la question 6. Dans cette réponse, on se propose de déduire le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} (-z)^n/n$ du rayon de convergence déjà calculé de $\sum_{n \geq 1} z^n/n$. On pourrait également faire appel à la règle de d'Alembert.

Pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+$, on a clairement l'équivalence

$$\left(\frac{\rho^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \iff \left(\frac{(-\rho)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée}$$

D'où l'égalité suivante

$$\begin{aligned} R &= \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}_+ : \text{la suite } \left(\frac{(-1)^n \rho^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \right\} \\ &= \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}_+ : \text{la suite } \left(\frac{\rho^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \right\} \end{aligned}$$

Mais cette dernière quantité n'est autre que le rayon de convergence de la série entière définissant f_1 , qui vaut 1 d'après la question 6. Ainsi

$$R = 1$$

Pour tout $x \in]-1; 1[$, on a $S(x) = \ln(1+x)$ d'après la question 14. Il en découle que $\exp(S(x)) = e^{\ln(1+x)} = 1+x$.

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \exp(S(x)) = 1+x$$

16 Éliminons d'emblée le cas facile où $z_0 = 0$. On a alors affaire à la série entière nulle $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} z_0^n t^n / n$, dont le rayon de convergence est $+\infty$.

Par contre, si $z_0 \neq 0$, on peut utiliser le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, notons $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n(t) = (-1)^{n-1} z_0^n t^n / n$. Alors

$$\left| \frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} \right| = \left| \frac{(-1)^n z_0^{n+1} t^{n+1} / (n+1)}{(-1)^{n-1} z_0^n t^n / n} \right| = |z_0| |t| \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z_0| |t|$$

De suite, si $|t| < |z_0|^{-1}$, c'est-à-dire lorsque $|z_0| |t| < 1$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ converge. Lorsque $|t| > |z_0|^{-1}$, elle diverge grossièrement. Par conséquent, le rayon de convergence cherché est $|z_0|^{-1}$.

$$\text{Le rayon de convergence de la série définissant } g \text{ est } \begin{cases} |z_0|^{-1} & \text{si } z_0 \neq 0 \\ +\infty & \text{si } z_0 = 0 \end{cases}$$

17 Lorsque $z_0 = 0$, g est la fonction identiquement nulle, qui est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; 1]$. Dans le cas contraire, on sait par la question 16 que le rayon de convergence de la série définissant g est $|z_0|^{-1}$. Par hypothèse, $|z_0| < 1$ donc $|z_0|^{-1} > 1$ et ainsi $[0; 1]$ est inclus dans l'intervalle ouvert $] -|z_0|^{-1}; |z_0|^{-1} [$ de convergence, où g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On aboutit donc à la même conclusion.

$$\text{La fonction } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0; 1].$$

On calcule g' sur $[0; 1]$ en appliquant à nouveau le théorème de dérivation terme à terme des séries entières. Pour $t \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n t^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z_0^{n+1} t^n && \text{(décalage d'indices)} \\ &= z_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-z_0 t)^n \\ &= \frac{z_0}{1 - (-tz_0)} && \text{(série géométrique)} \\ g'(t) &= \frac{z_0}{1 + tz_0} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall t \in [0; 1] \quad g'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0}$$

18 La fonction g est dérivable sur $[0; 1]$ d'après la question précédente, et la fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction composée est donc dérivable sur $[0; 1]$, et la règle de dérivation des fonctions composées donne

$$\forall t \in [0; 1] \quad h'(t) = g'(t)(\exp' \circ g)(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} (\exp \circ g)(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t)$$

ce qui est le résultat attendu.

$$\forall t \in [0; 1] \quad h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t)$$

19

Le résultat demandé $\exp(S(z_0)) = z_0 + 1$ est déjà valable si z_0 est dans l'intervalle réel $] -1; 1[$, comme on l'a montré à la question 15. Il s'agit maintenant de le prouver pour des valeurs de z_0 complexes, ce qui est plus fort et doit faire intervenir de nouveaux arguments. C'est en ce sens que S est le « logarithme complexe » du titre de cette partie.

Comme $h(0) = e^{g(0)} = e^0 = 1$, et grâce à la question 18, on observe que h est solution du problème de Cauchy linéaire suivant

$$\begin{cases} y' = \frac{z_0}{1 + tz_0} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On vérifie que la fonction affine $\tilde{h}: t \mapsto 1 + tz_0$ est également solution du problème, en l'injectant dans l'équation. En effet, elle vérifie la condition initiale $\tilde{h}(0) = 1$ et par ailleurs

$$\forall t \in [0; 1] \quad \tilde{h}'(t) = z_0 = \frac{z_0}{1 + tz_0} \tilde{h}(t)$$

Or le théorème de Cauchy linéaire assure l'unicité de la solution du problème de Cauchy. Par conséquent, $h = \tilde{h}$. En particulier, au point 1 ces deux fonctions prennent les valeurs $h(1) = \exp(g(1)) = \exp(S(z_0))$ et $\tilde{h}(1) = 1 + z_0$. D'où

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1$$

L'équation à laquelle on est confronté

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad \text{avec} \quad a(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0}$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants. La théorie nous dit que ses solutions sont toutes de la forme $t \mapsto C \exp(A(t))$, où A est une primitive de a et C une constante quelconque.

Si l'on s'engage dans cette voie, il faut éviter l'erreur rédhibitoire qui consiste à affirmer que $A: t \mapsto \ln(1 + tz_0)$ est une primitive de a , puisqu'en dérivant formellement on trouve $A' = a$. En réalité, ceci n'a guère de sens, car la quantité $1 + tz_0$ est complexe, tandis que $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour réparer ce raisonnement, il nous faudrait une extension de la fonction $\ln$ au domaine complexe, ce qui est précisément la conclusion de la question (sans compter qu'il faudrait donner un sens à la notion de dérivation par rapport à une variable complexe).

L'unique méthode disponible pour primitiver a est de primitiver séparément ses parties réelle et imaginaire. Si théoriquement cette démarche aboutit, les calculs sont totalement impraticables.

III. UN ÉQUIVALENT DE f_α QUAND x TEND VERS 1, DANS LE CAS OÙ $\alpha \in]0; 1[$

20 Soit $x \in]0; 1[$. Étudions l'intégrabilité de la fonction continue $t \mapsto x^t/t^\alpha$ aux extrémités du domaine d'intégration.

- Étude en 0 : remarquons que $x^t = e^{(\ln x)t} \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. Plus spécifiquement, on a la majoration suivante, sur l'intervalle $]0; 1]$

$$\forall t \in]0; 1] \quad 0 \leq \frac{x^t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

Le critère de Riemann assure que la fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable sur $]0; 1]$, parce qu'on est dans le cas $\alpha < 1$. Par domination, il en va de même pour la fonction $t \mapsto x^t/t^\alpha$ à valeurs positives.

- Étude en $+\infty$: puisque $\alpha > 0$, on a la majoration

$$\forall t \in [1; +\infty[\quad 0 \leq \frac{x^t}{t^\alpha} \leq x^t = e^{(\ln x)t}$$

or la fonction $t \mapsto e^{(\ln x)t}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ car $\ln x < 0$.

En conclusion, la fonction $t \mapsto x^t/t^\alpha$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0; 1] \cup [1; +\infty[$. Autrement dit,

Pour tout $x \in]0; 1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

21 Soit $x \in]0; 1[$. En passant à la forme exponentielle,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{t \ln x}}{t^\alpha} dt$$

Cela incite à effectuer le changement de variable affine $u = (-\ln x)t$. Observons que $-\ln x > 0$, puisque $x \in]0; 1[$, si bien que $t \mapsto (-\ln x)t$ est croissante.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{t \ln x}}{t^\alpha} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{(-u/\ln x)^\alpha} \frac{1}{(-\ln x)} du \quad (du = (-\ln x) dt) \\ &= (-\ln x)^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} u^{1-\alpha-1} e^{-u} du \end{aligned}$$

En reconnaissant l'expression de la fonction Γ d'Euler, on peut donc conclure que

$$\forall x \in]0; 1[\quad I(x) = \Gamma(1-\alpha)(-\ln x)^{\alpha-1}$$

22 Soit $x \in]0; 1[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{x^t}{t^\alpha} = \exp(t \ln x - \alpha \ln t)$$

Puisque $x \in]0; 1[$, la fonction $t \mapsto t \ln x$ est décroissante. De plus, comme $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto -\alpha \ln t$ l'est également. On en déduit que $t \mapsto t \ln x - \alpha \ln t$ est décroissante, en tant que somme de fonctions décroissantes. Or la fonction $\exp$ est croissante. La composition de deux fonctions respectivement croissante et décroissante est décroissante, donc $t \mapsto x^t/t^\alpha$ est décroissante.

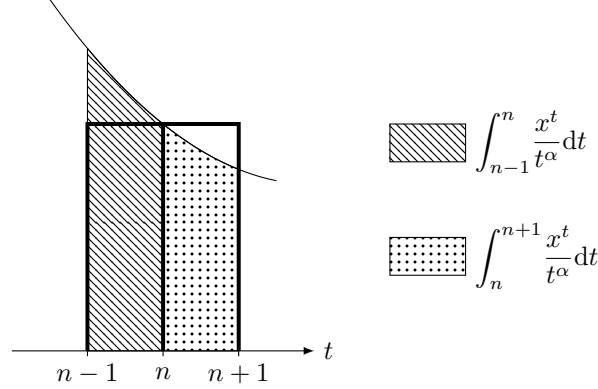
La fonction $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est décroissante.

23

Un petit dessin ne fait jamais de mal. On va montrer l'encadrement

$$\forall x \in]0; 1[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq \frac{x^n}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{x^t}{t^\alpha} dt$$

Il est illustré par la figure suivante, où les deux rectangles mis en exergue ont une aire égale à x^n/n^α .



Fixons $x \in]0; 1[$. D'après la question précédente, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall t \in]n-1; n] \quad \frac{x^n}{n^\alpha} \leq \frac{x^t}{t^\alpha}$$

En intégrant l'inégalité précédente entre $n-1$ et n , on déduit

$$\frac{x^n}{n^\alpha} = \int_{n-1}^n \frac{x^n}{n^\alpha} dt \leq \int_{n-1}^n \frac{x^t}{t^\alpha} dt$$

On obtient une minoration analogue en constatant que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in [n; n+1] \quad \frac{x^t}{t^\alpha} \leq \frac{x^n}{n^\alpha}$$

D'où, en intégrant entre n et $n+1$,

$$\int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq \frac{x^n}{n^\alpha}$$

Ainsi, on a établi l'encadrement

$$\int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq \frac{x^n}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{x^t}{t^\alpha} dt$$

D'où, en sommant sur $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{x^t}{t^\alpha} dt$$

En résumé,

$$\forall x \in]0; 1[\quad \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq f_\alpha(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt$$

24

On peut réécrire l'encadrement de la question 23 de la manière suivante

$$\forall x \in]0; 1[\quad I(x) - \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq f_\alpha(x) \leq I(x)$$

En outre, $x^t = \exp(t \ln x) \leq 1$ pour $x \in]0; 1[$ et $t \in]0; 1]$, puisqu'alors $t \ln x < 0$. Il vient alors

$$\underbrace{-\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt}_{\text{ne dépend pas de } x} \leq -\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt$$

Mais alors $\forall x \in]0; 1[\quad 1 - \frac{1}{I(x)} \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{f_\alpha(x)}{I(x)} \leq 1$

D'après la question 21, $I(x) = \Gamma(1-\alpha)(-\ln x)^{\alpha-1}$ pour tout $x \in]0; 1[$. Or $x \mapsto -\ln x$ tend vers 0 en prenant des valeurs positives lorsque $x \rightarrow 1^-$, la constante $\Gamma(1-\alpha)$ est strictement positive (c'est l'intégrale d'une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$) et $\alpha - 1 < 0$. On en déduit que $I(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$. Il en résulte que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 - \frac{1}{I(x)} \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \right) = 1$$

Par un théorème d'encadrement, on déduit que $f_\alpha(x)/I(x)$ tend de même vers 1. Autrement dit,

$$\boxed{f_\alpha(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \Gamma(1-\alpha)(-\ln x)^{\alpha-1}}$$