Polynômes à racines toutes réelles

Notations

— Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on notera $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial où $n! = n(n-1)\cdots 2.1$.

— On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que a est un zéro d'ordre $m > 0$ de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Dans la suite du texte quand on liste les zéros d'un polynôme on répètera chaque racine autant de fois que sa multiplicité : ainsi les racines de $X^3(X-1)^2$ sont $0, 0, 0, 1, 1$.

— On note $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'opérateur de dérivation, i.e. $D(f) = f'$. Pour $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, on note $Q(D)$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} Q(D) \, : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \\ f &\longmapsto \sum_{k=0}^n a_k D^k(f), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$Q(D)f(x) = \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x)$$

où $f^{(k)}$ est la fonction dérivée k-ème.

Log-concavité des suites

Soit $(a_0, \cdots, a_n)$ une suite à valeurs réelles. On dira qu'elle est

— *unimodulaire* s'il existe $0 \leqslant j \leqslant n$ tel que $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_j \geqslant a_{j+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n$;

— *log-concave* si pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, on a $a_j^2 \geqslant a_{j-1}a_{j+1}$;

— *ultra log-concave* si $(\frac{a_k}{\binom{n}{k}})_{k=0,\cdots,n}$ est log-concave.

1 ▷ Montrer que la suite binomiale $(\binom{n}{k})_{k=0,\cdots,n}$ est log-concave.

2 ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.

3 ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est strictement positive et log-concave, alors elle est unimodulaire.

Polynômes réels à racines toutes réelles

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbf{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Il est dit à racines toutes réelles si toutes ses racines complexes sont en fait réelles, i.e. $P(z) = 0$ implique $z \in \mathbf{R}$. On suppose dans cette question que P est à racines toutes réelles.

4 ▷ Montrer que P' est à racines toutes réelles.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle en veillant aux multiplicités des racines.

5 ▷ Montrer que $Q(X) = X^nP(1/X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.
Indication : on commencera par préciser le degré de $Q(X)$.

6 ▷ Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on considère $Q_1(X) = P^{(k-1)}(X)$ puis $Q_2(X) = X^{n-k+1}Q_1(X^{-1})$ et enfin $Q(X) = Q_2^{(n-k-1)}(X)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme de degré au plus 2 à racines toutes réelles et en déduire que $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est ultra log-concave.

On considère comme précédemment un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré n à racines toutes réelles.

7 ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que $e^{\alpha x}D(e^{-\alpha x}P(x))$ est un polynôme à racines toutes réelles.
Indication : on pourra à nouveau utiliser le théorème de Rolle en considérant en outre le comportement en $\pm\infty$.

8 ▷ Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^{m} b_jX^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. Montrer que $Q(D)P(X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.