

Dénombrement, dénombrabilité

1 _____ (**) _____

On considère n droites $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ dans le plan 2 à 2 sécantes, mais 3 à 3 non concourantes. On note a_n le nombre de régions délimitées par ces droites.

- Déterminer a_0, a_1, a_2 et a_3 .
- Déterminer le nombre d'intersections entre $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_{n-1}$.
- Les droites $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_{n-1}$ délimitent a_{n-1} régions du plan. Combien d'entre-elles sont séparées en deux par $\mathcal{D}_n$?
- En déduire l'expression de a_n pour tout entier n .

2 _____ (**) _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle partie lacunaire de $\llbracket 1; n \rrbracket$ toute partie éventuellement vide de cet ensemble qui ne contient pas deux entiers consécutifs. On note u_n le nombre de telles parties.

- Quelles sont les valeurs de u_1 et u_2 ?
- Démontrer la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire une expression de u_n en fonction de n .

Pour tout entier p , on note $v_{n,p}$ le nombre de parties lacunaires de $\llbracket 1; n \rrbracket$ à p éléments.

- Montrer que $v_{n,p}$ est égal au nombre d'éléments de $\{0, 1\}^n$ comportant $n-p$ fois la valeur 0 et jamais deux 1 consécutifs.
- En déduire que $v_{n,p} = \binom{n+1-p}{p}$.

3 _____ (**) _____ **Mines PC 2017**

Déterminer le nombre d'applications $f : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$ telles que $f \circ f = f$.

4 _____ (**) _____

Un nombre réel x est un nombre algébrique (resp. un entier algébrique) s'il existe un polynôme P (resp. un polynôme unitaire) à coefficients entiers tel que $P(x) = 0$. A titre d'exemple, $\sqrt{2}$ qui est connu pour être irrationnel est un entier algébrique puisque racine du polynôme $X^2 - 2$.

- Montrer que les éléments de $\mathbb{Q}$ sont des nombres algébriques. Quels sont parmi eux les entiers algébriques ?
- Justifier que l'ensemble des nombres algébriques est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$.
- Un réel est dit transcendant s'il n'est pas algébrique. Que peut-on déduire de la question précédente ?

Espaces probabilisés

5 _____ (**) _____

Soient E et Ω deux ensembles quelconques non vides et $f : E \rightarrow \Omega$ une application. Pour toute partie A de Ω , on note $f^{-1}(A)$ l'image réciproque de la partie A par f .

- Montrer que pour toutes parties A et B de Ω ,

$$f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)} \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

En déduire $f^{-1}(\emptyset)$ et $f^{-1}(A \cap B)$.

- Les égalités précédentes sont-elles conservées pour des intersections ou des unions dénombrables de parties ?
- Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω . Montrer que $\mathcal{U}$ est une tribu sur E avec

$$\mathcal{U} = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{T}\}$$

- Donner un exemple d'ensembles E et Ω et d'application $f : E \rightarrow \Omega$ telle que l'image de la tribu $\mathcal{P}(E)$ par f ne soit pas une tribu sur Ω .

6 _____ (*) _____ **Mines PC 2017**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle non nulle, décroissante et de limite nulle. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité sur $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\llbracket n; +\infty \rrbracket) = \lambda \cdot a_n$$

7 _____ (**) _____ **Centrale PC 2017**

Soient (Ω, τ, P) un espace probabilisé, A et B deux évènements. Montrer que

$$|P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)| \leq \frac{1}{4}$$

8 _____ (*) _____

Soit $\alpha, \beta \in]0; 1[$. On admet que l'on peut définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$ qui vérifie

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(\{(i, j)\}) = \alpha \beta (1 - \alpha)^i (1 - \beta)^j$$

Déterminer les probabilités des évènements suivants :

- (a) $A_i = \{(i, k), k \in \mathbb{N}\}$ et $B_j = \{(k, j), k \in \mathbb{N}\}$ pour tous i, j .
- (b) $C = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i > j\}$ et $D = \{(i, i), i \in \mathbb{N}\}$.

9 _____ (*) _____

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé. Justifier que

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

10 _____ (*) _____

Deux joueurs, Alice et Bob, jouent à pile ou face avec une pièce truquée qui fait face avec une probabilité $p \in]0; 1[$. C'est Alice qui démarre. Le premier qui fait face gagne la partie.

- (a). Quelle est la probabilité que Alice gagne à son n -ième lancer ?
- (b). Quelle est la probabilité que Alice gagne ?
- (c). Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?
- (d). Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

11 _____ (*) _____ **X PC 2017**

Une urne contient une boule blanche et une deuxième boule aléatoire, blanche ou noire, chaque couleur ayant une probabilité $1/2$. On effectue deux tirages successifs sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que le premier tirage a donné une boule blanche.

12 _____ (*) _____ **X PC 2017**

On considère un dé rouge truqué qui fait 6 avec probabilité $p \in]0; 1[$, les autres issues étant équiprobables, et un dé blanc non truqué. On lance simultanément les deux dés, un pour chaque joueur. En cas d'égalité, le dé blanc gagne. Quel dé faut-il choisir ?

13 _____ (**) _____ **Mines PC 2017**

On répartit aléatoirement $p \geq 1$ jetons dans $n \geq 1$ cases. On note A_i l'évènement « la i -ième case est vide ». Calculer la probabilité de l'évènement $A_1 \cup \dots \cup A_n$.

14 _____ (*) _____ **Mines PC 2017**

On considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. Si on tire une boule rouge, on la remet dans l'urne. Si on tire une blanche, on la retire définitivement. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité de tirer une boule blanche exactement en n tirages ?

15 _____ (*) _____ **Centrale PC 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $2n$ équipes sportives, n en première division et n en deuxième. On organise n matches.

- (a). Soit p_n la probabilité que les n équipes de première division affrontent des équipes de deuxième division. Exprimer p_n en fonction de n .
- (b). Etudier la convergence de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

16

(***)

Mme Ringot et Mr Puyhaubert s'affrontent à pile ou face suivant le principe suivant : ils lancent indéfiniment une pièce équilibrée et

- Mme Ringot gagne si la configuration , *pile*, *pile*, *face* apparaît dans la suite des lancers avant que *face*, *pile*, *pile* n'apparaisse.
- Mr Puyhaubert gagne si la configuration *face*, *pile*, *pile* apparaît dans la suite des lancers avant que *pile*, *pile*, *face* n'apparaisse.

On cherche à déterminer lequel des deux a la plus grande probabilité de gagner.

- (a). Pour tout $n \geq 3$, on note R_n l'évènement « Mme Ringot est déclarée gagnante à l'issue du n -ième lancer » et on pose $r_n = P(R_n)$. Calculer r_3 , r_4 puis r_n pour tout entier n , et en déduire la probabilité que Mme Ringot gagne le duel.
- (b). Pour tout $n \geq 1$, on note d_n la probabilité que lors des n premiers lancers n'apparaisse jamais deux *pile* consécutifs.
- (i) Calculer d_1 et d_2 .
- (ii) En considérant le résultat des deux premiers lancers, montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$$

- (iii) En déduire que $\sum_{n \geq 0} d_n$ converge et calculer sa somme.

- (c). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (resp. B_n) l'évènement « un joueur est déclaré gagnant à l'issue du n -ième lancer » (resp. « personne n'a encore gagné à l'issue du n -ième lancer »).

- (i) Montrer que pour tout $n \geq 2$,
- $$P(B_n) = \frac{1}{2^n} + d_n$$

- (ii) En déduire que pour tout $n \geq 3$,
- $$P(A_n) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$$

- (iii) Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

- (d). Déduire des questions précédentes la probabilité de victoire de Mr Puyhaubert et conclure.

Indications

- 1** (c) Justifier qu'il y en a n exactement en utilisant un « découpage » judicieux de $\mathcal{D}_n$ à l'aide de la question précédente.
 (d) Utiliser la question précédente pour obtenir une formule de récurrence satisfaite par $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2** (b) Séparer l'ensemble des parties lacunaires de $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$ en deux, entre celles qui contiennent $n+2$ et les autres.
 (d) Utiliser une bijection simple entre l'ensemble des parties lacunaires à p éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ et l'ensemble des éléments de $\{0, 1\}^n$ satisfaisant les conditions décrites.
 (e) Vérifier que l'application qui à une suite d'éléments de $\{0, 1\}^{n-p+1}$ rajoute un 0 après chaque 1 puis supprime le dernier zéro induit une bijection entre $\{0, 1\}^{n+1-p}$ et l'ensemble des éléments que l'on cherche à dénombrer.
- 3** Vérifier que pour construire une application telle que $f \circ f = f$, il suffit de choisir ses points fixes, puis d'envoyer tous les autres éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sur ces points fixes.
- 4** (a) Montrer que si $p/q \in \mathbb{Q}$ est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers, alors p/q est un entier en raisonnant par l'absurde et en introduisant un diviseur premier de q . On pensera bien entendu à supposer la fraction irréductible, c'est-à-dire que p et q n'ont pas de facteur premier en commun.
 (b) Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable, en l'écrivant comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.
 (c) On rappelle que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- 5** (a) Raisonner par équivalence à partir de la propriété « $\omega \in f^{-1}(\overline{A})$ ».
 (b) Oui, en adaptant la justification précédente.
 (c) Vérifier les axiomes des tribus en utilisant les questions précédentes.
 (d) Considérer une fonction constante.
- 6** Raisonner par analyse-synthèse, en utilisant notamment le fait que $P(\mathbb{N}) = 1$.
- 7** On pourra étudier rapidement l'application $x \mapsto x \cdot (1 - x)$ sur $[0; 1]$.
- 8** Dans les deux cas, on calculera la probabilité d'un événement en sommant la probabilité de chacun de ses éléments.
- 9** Utiliser la continuité décroissante.
- 10** Utiliser l'univers habituel $\Omega = \{\underbrace{P \cdots P}_n F, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$ muni de la probabilité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\{\underbrace{P \cdots P}_n F\}) = p(1 - p)^n$$
 puis calculer la probabilité de chaque événement en sommant les probabilités de chacun de leurs éléments.
- 11** Utiliser l'événement A : « la deuxième boule de l'urne est blanche » et les événements $(B_i)_{i \in \{1, 2\}}$ définis par « on pioche une boule au i -ième tirage ».
- 12** Calculer la probabilité du dé rouge de l'emporter sur le dé blanc en faisant la somme des probabilités des issues gagnantes pour ce dé.
- 13** On pourra s'intéresser à l'événement contraire, et faire le lien avec le nombre $s_{p,n}$ de surjections de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ si on sait le calculer. On peut aussi envisager une preuve plus directe grâce à la formule d'inclusion-exclusion. Dans les deux cas, on est limite hors-programme (du moins sans indication).
- 14** Calculer les sommes des probabilités de chaque issue donnant une seule boule blanche sur n tirages (il y a n tirages de cette nature).
- 15** (a) Procéder par dénombrement : compter le nombre de façons d'organiser les n matchs entre les $2n$ équipes puis, parmi celles-ci, les configurations qui opposent uniquement la première division à la deuxième division.
 (b) Exprimer a_n à l'aide de factorielles, puis utiliser la formule de Stirling.