

IV. ALGÈBRE LINÉAIRE

24 La quatrième colonne de A est nulle, donc A n'est pas inversible et

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut en déduire que

Le réel 0 est valeur propre de A et $(0, 0, 0, 1)^T$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

25 Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition, en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, puis par rapport à la troisième,

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det(A - tI_4) \\ &= \begin{vmatrix} p-t & 0 & p & 0 \\ q & q-t & 0 & 0 \\ 0 & p & -t & 0 \\ 0 & 0 & q & -t \end{vmatrix} \\ &= -t \begin{vmatrix} p-t & 0 & p \\ q & q-t & 0 \\ 0 & p & -t \end{vmatrix} \\ &= -tp \begin{vmatrix} q & q-t \\ 0 & p \end{vmatrix} + t^2 \begin{vmatrix} p-t & 0 \\ q & q-t \end{vmatrix} \\ &= -tp(qp) + t^2(p-t)(q-t) \\ &= -p^2qt + t^2(pq - (p+q)t + t^2) \\ &= t^4 - (p+q)t^3 + pqt^2 - p^2qt \\ \chi_A(t) &= t^4 - t^3 + pqt^2 - p^2qt \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t^4 - t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ avec $\alpha = pq$; $\beta = -p^2q$; $\gamma = 0$.

Le programme officiel définit le polynôme caractéristique de A comme étant $\det(tI_n - A) = (-1)^n \det(A - tI_n)$ pour être unitaire en toute dimension $n \in \mathbb{N}^*$, notamment pour n impair. Le coefficient devant t^{n-1} est $-\text{Tr}(A)$ et le coefficient constant est $(-1)^n \det A$. Ici, on est en dimension 4, $-\text{Tr}(A) = -p - q = -1$ et $\gamma = \det A = 0$.

On peut également calculer le déterminant avec la règle de Sarrus :

$$-t \begin{vmatrix} p-t & 0 & p \\ q & q-t & 0 \\ 0 & p & -t \end{vmatrix} = -t((p-t)(q-t)(-t) + qp^2)$$

ce qui conduit au même résultat.

26 Soient $t \in \mathbb{R}$ et S la matrice colonne de l'énoncé. On a

$$S = tAS + L \iff S - tAS = L \iff (I_4 - tA)S = L$$

D'où

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, S \text{ est solution de } (E_t) \text{ si et seulement si } (I_4 - tA)S = L.$$

27 Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Comme le déterminant en dimension 4 est 4-linéaire, on a

$$t^4 \chi_A \left(\frac{1}{t} \right) = t^4 \det \left(A - \frac{1}{t} I_4 \right) = \det \left(t \left(A - \frac{1}{t} I_4 \right) \right) = \det (tA - I_4) = \psi_A(t)$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \psi_A(t) = t^4 \chi_A \left(\frac{1}{t} \right)$$

28 Soit $t \in \mathbb{R}^*$. D'après les questions 25 et 27,

$$\psi_A(t) = t^4 \chi_A \left(\frac{1}{t} \right) = t^4 \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^3} + pq \frac{1}{t^2} - p^2 q \frac{1}{t} \right) = 1 - t + pqt^2 - p^2 qt^3$$

Les fonctions polynomiales

$$t \mapsto \psi_A(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto 1 - t + pqt^2 - p^2 qt^3$$

sont égales sur $\mathbb{R}^*$. Par continuité, ces fonctions sont égales sur $\mathbb{R}$, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi_A(t) = -p^2 qt^3 + pqt^2 - t + 1$$

29 Le polynôme ψ_A vérifie $\psi_A(0) = 1 \neq 0$. Par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\psi_A(t) \neq 0$ pour tout $t \in]-\varepsilon; \varepsilon[$. Or $\psi_A(t) = \det(I_4 - tA)$, donc pour un tel t la matrice $I_4 - tA$ est inversible, et le système linéaire $(I_4 - tA)S = L$ d'inconnue S admet une unique solution $S = (I_4 - tA)^{-1}L$. Ainsi,

$$\text{Pour } t \text{ dans un voisinage de } 0, \text{ l'équation } (E_t) \text{ admet une unique solution } S.$$

30 Notons $U_k = (u_{0,k}, u_{1,k}, u_{2,k}, u_{3,k})^\top$ la k^{e} colonne de $I_4 - tA$, pour $k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, et $L = (\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)^\top$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $S = (S_0, S_1, S_2, S_3)^\top$ soit solution de (E_t) . On a $(I_4 - tA)S = L$, et par définition du produit de matrices, pour tout $i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$,

$$\ell_i = \sum_{k=0}^3 u_{i,k+1} S_k$$

C'est aussi le terme de la ligne $i-1$ de la matrice $U_1 S_0 + U_2 S_1 + U_3 S_2 + U_4 S_3$. D'où

$$L = U_1 S_0 + U_2 S_1 + U_3 S_2 + U_4 S_3$$

31 Le déterminant en dimension 4 est une forme 4-linéaire alternée. Calculons

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) &= \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_1 S_0 + U_2 S_1 + U_3 S_2 + U_4 S_3) \\ &= S_0 \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_1) + S_1 \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_2) \\ &\quad + S_2 \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_3) + S_3 \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) \\ &= S_3 \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) \\ \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) &= S_3 \cdot \psi_A(t) \end{aligned}$$

car le déterminant d'une matrice est aussi celui de la famille des vecteurs colonnes qui la composent. Finalement,

$$\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \psi_A(t)$$

32 Soit $t \in \mathbb{R}$. D'une part, calculons ce déterminant en développant par rapport à la dernière colonne.

$$\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = \begin{vmatrix} 1-tp & 0 & -tp & 1 \\ -tq & 1-tq & 0 & 0 \\ 0 & -tp & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -tq & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -tq & 1-tq & 0 \\ 0 & -tp & 1 \\ 0 & 0 & -tq \end{vmatrix} = pq^2t^3$$

car le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit de ses termes diagonaux. D'autre part, d'après la question 31,

$$\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \psi_A(t)$$

Or, d'après la question 29, $\psi_A(t)$ ne s'annule pas pour t dans un voisinage de 0. Dans un tel voisinage,

$$S_3 = \frac{\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L)}{\psi_A(t)}$$

et d'après la question 28, $\psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$

On obtient
$$S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1} \text{ pour } t \text{ au voisinage de } 0.$$

33 Le déterminant d'une matrice carrée est égal à celui de sa transposée. On obtient

$$\det(A^\top - \lambda I_4) = \det((A - \lambda I_4)^\top) = \det(A - \lambda I_4) = 0$$

car $A - \lambda I_4$ n'est pas inversible. Ainsi,

$$\text{Le complexe } \lambda \text{ est une valeur propre de } A^\top.$$

34 D'après la question 33, λ est également une valeur propre de $A^\top$. On peut alors noter $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ un vecteur propre associé. Le système $A^\top X = \lambda X$ s'écrit

$$\begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 + qx_4 = \lambda x_3 \\ 0 = \lambda x_4 \end{cases}$$

Comme $\lambda \neq 0$, on a $x_4 = 0$, en conséquence x_1, x_2, x_3 ne sont pas tous nuls car X est un vecteur propre, donc non nul. Les trois premières lignes du système $A^\top X = \lambda X$ s'écrivent

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \end{cases} \text{ où } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0).$$

35 Suivant l'indication de l'énoncé, on distingue trois cas.

- Cas (i). On a $M = |x_3| > 0$. La troisième ligne du système $\mathcal{H}$ donne

$$|\lambda| = p \frac{|x_1|}{|x_3|} \leq p < 1 \quad \text{car} \quad \frac{|x_1|}{|x_3|} \leq 1$$

- Cas (ii). On a $M = |x_2| > 0$ et $|x_2| > |x_3|$. La seconde ligne du système $\mathcal{H}$ donne, en utilisant l'inégalité triangulaire, puis $\frac{|x_3|}{|x_2|} < 1$,

$$|\lambda| = \frac{|qx_2 + px_3|}{|x_2|} \leq \frac{|qx_2| + |px_3|}{|x_2|} = q + p \frac{|x_3|}{|x_2|} < q + p = 1$$

- Cas (iii). On a $M = |x_1| > 0$, $|x_1| > |x_2|$, et $|x_1| > |x_3|$. La première ligne du système $\mathcal{H}$ donne, en utilisant l'inégalité triangulaire, puis $\frac{|x_2|}{|x_1|} < 1$,

$$|\lambda| = \frac{|px_1 + qx_2|}{|x_1|} \leq \frac{|px_1| + |qx_2|}{|x_1|} = p + q \frac{|x_2|}{|x_1|} < p + q = 1$$

En conclusion, si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| < 1$.

Cette méthode peut servir à montrer que les valeurs propres d'une matrice stochastique (où la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1 et les coefficients sont positifs) sont de module inférieur ou égal à 1.

36 D'après la question 25, 0 est racine simple de χ_A , car le coefficient devant t est $-p^2q \neq 0$. Ainsi, 0 est une valeur propre de A de multiplicité 1. Le polynôme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ ses racines non nulles. Ce sont les valeurs propres complexes non nulles de A. On peut supposer qu'elles sont rangées par ordre croissant de module, c'est-à-dire $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$. D'après la question 35, on a $|\lambda_3| < 1$, d'où, comme χ_A est unitaire,

Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ tels que $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| < 1$ et $\chi_A(t) = t(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3)$.

37 D'après la question 27, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \psi_A(t) &= t^4 \chi_A \left(\frac{1}{t} \right) \\ &= t^4 \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} - \lambda_1 \right) \left(\frac{1}{t} - \lambda_2 \right) \left(\frac{1}{t} - \lambda_3 \right) \\ &= (1 - t\lambda_1)(1 - t\lambda_2)(1 - t\lambda_3) \\ &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \left(\frac{-1}{\lambda_1} + t \right) \left(\frac{-1}{\lambda_2} + t \right) \left(\frac{-1}{\lambda_3} + t \right) \\ \psi_A(t) &= \mu(t - a)(t - b)(t - c) \end{aligned}$$

avec $\mu = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3; \quad a = \frac{1}{\lambda_3}; \quad b = \frac{1}{\lambda_2}; \quad c = \frac{1}{\lambda_1}$

Par continuité, cette égalité est encore vraie pour $t = 0$. On a bien, d'après la question 36,

$\mu \neq 0, \quad 1 < |a| \leq |b| \leq |c| \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \psi_A(t) = \mu(t - a)(t - b)(t - c)$