Problème

Première partie

1. Avant le deuxième tirage, l'urne contient trois boules, dont 1 ou 2 blanches. La variable X_1 est donc à valeurs dans $\{1, 2\}$.
Par ailleurs, l'événement $[X_1 = 1]$ (resp. $[X_1 = 2]$) se réalise si, et seulement si, le premier tirage a renvoyé une boule blanche (resp. noire). Par suite, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$.
La variable X_1 suit donc la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Elle admet espérance et variance données par $\mathbb{E}(X_1) = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{4}$.

2. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k l'événement « le k-ième tirage amène une boule blanche ».
On a $[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2$ d'où

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

car, sachant B_1 réalisé, l'événement B_2 est réalisé si, et seulement si, le deuxième tirage renvoie la boule blanche parmi les trois boules qui composent l'urne.
De même,

$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\,\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Enfin, par incompatibilité,

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}\big((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)\big) = \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Après chacun des k premiers tirages, on a ajouté une boule dans l'urne, blanche ou noire. Avant le $k+1$-ième tirage, le nombre de boules blanches présentes dans l'urne est donc un entier quelconque entre 1 et $k+1$: $X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!]$.

4. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1, k+1]\!]$. Sachant l'événement $[X_k = j]$ réalisé, les seules valeurs possibles pour X_{k+1} sont j et $j+1$: la première (resp. seconde) sera prise par X_{k+1} si, et seulement si, le $k+1$-ième tirage amène l'une des j boules blanches (resp. $k+2-j$ boules noires) parmi les $k+2$ boules que compte l'urne. Ainsi,

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_{[X_k = j]}(X_{k+1} = i) = \begin{cases} \frac{j}{k+2} & \text{si } i = j \\ 1 - \frac{j}{k+2} & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable X_k et la question **4.**,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1} = i) &= \sum_{j \in X_k(\Omega)} \mathbb{P}_{[X_k = j]}(X_{k+1} = i)\,\mathbb{P}(X_k = j) = \sum_{\substack{j \in X_k(\Omega) \\ j \in \{i-1, i\}}} \mathbb{P}_{[X_k = j]}(X_{k+1} = i)\,\mathbb{P}(X_k = j) \\ &= \frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = i) + \left(1 - \frac{i-1}{k+2}\right)\mathbb{P}(X_k = i-1),\end{aligned}$$

d'où le résultat.
Remarque. Le passage d'une somme à l'autre (y compris la somme en extension de la deuxième ligne) dans le calcul ci-dessus se justifie par l'ajout ou le retrait de termes nuls.

6. On obtient :

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{24}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{11}{24}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{11}{24} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{1}{24}.$$

7. a. D'après la formule de la question **5.** appliquée à $i = 1$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = 1)$$

d'où l'on déduit, par récurrence immédiate, que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Remarque. On peut également donner une justification probabiliste directe du résultat : avec les notations introduites en **2.**, on a $[X_k = 1] = B_1 \cap \cdots \cap B_k$ d'où, d'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

car, sachant l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{j-1}$ réalisé pour $2 \leqslant j \leqslant k$, la réalisation de l'événement B_j correspond au tirage de l'unique boule blanche parmi les $j+1$ que contient l'urne, si bien que $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{j-1}}(B_j) = \frac{1}{j+1}$.

b. Vu les rôles symétriques des boules blanches et noires dans l'expérience, la variable $Y_k = k+2-X_k$ donnant le nombre de boules noires présentes dans l'urne avant le $k+1$-ième tirage suit la même loi que X_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par suite, d'après **a.**,

$$\mathbb{P}(X_k = k+1) = \mathbb{P}(Y_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Plus généralement,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \in [\![1, k+1]\!], \quad \mathbb{P}(X_k = i) = \mathbb{P}(X_k = k+2-i).$$

c. Il vient d'après **5.** et **a.** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = (k+2)!\Big(\frac{2}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = 2) + \frac{k+1}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = 1)\Big) = 2a_k + k + 1.$$

Par suite,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_{k+1} = a_{k+1} + k + 3 = 2(a_k + k + 2) = 2b_k,$$

si bien que la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = 2^k b_0 = 2^{k+1}.$$

Il en ressort que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{b_k - k - 2}{(k+1)!} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

Quatrième partie

14. a. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_{i,j}(\lambda \mathrm{P}+\mathrm{Q}) &= j\big(\lambda \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)+\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1)\big)-i\big(\lambda \mathrm{P}(\mathrm{X})+\mathrm{Q}(\mathrm{X})\big)\\ &= \lambda\big(j\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-i\mathrm{P}(\mathrm{X})\big)+\big(j\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1)-i\mathrm{Q}(\mathrm{X})\big)=\lambda\varphi_{i,j}(\mathrm{P})+\varphi_{i,j}(\mathrm{Q}),\end{aligned}$$

ce qui établit la linéarité de $\varphi_{i,j}$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_{i,j}(\mathrm{X}^k)=j(\mathrm{X}+1)^k-i\mathrm{X}^k=j\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\mathrm{X}^\ell-i\mathrm{X}^k=(j-i)\mathrm{X}^k+\sum_{\ell<k}j\binom{k}{\ell}\mathrm{X}^\ell$$

est de degré k car $j \neq i$ par hypothèse. Pour $\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{d} a_k\mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré d, on a alors

$$\varphi_{i,j}(\mathrm{P})=\sum_{k=0}^{d} a_k\varphi_{i,j}(\mathrm{X}^k)=a_d\varphi_{i,j}(\mathrm{X}^d)+\sum_{k<d} a_k\varphi_{i,j}(\mathrm{X}^k)$$

où le premier terme est de degré d car $a_d \neq 0$ en tant que coefficient dominant du polynôme P de degré d, alors que les suivants sont de degrés strictement inférieurs à d. Le polynôme $\varphi_{i,j}(\mathrm{P})$ est donc de degré d.

c. D'après la question **b.**, $\mathrm{P} \neq 0$ implique $\varphi_{i,j}(\mathrm{P}) \neq 0$. En d'autres termes, $\operatorname{Ker}\varphi_{i,j}=\{0\}$ et l'application linéaire $\varphi_{i,j}$ est donc injective.

d. Le résultat étant évident pour $\mathrm{P}=0$, il suffit de considérer un polynôme P non nul, dont on note n le degré. D'après les questions **b.** et **c.**, l'application linéaire $\varphi_{i,j}$ induit sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ de dimension finie un endomorphisme injectif, qui est automatiquement surjectif. Puisque $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, il existe donc $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}=\varphi_{i,j}(\mathrm{Q})$.

15. a. Il suffit de vérifier que $\varphi_{2,1}(-\mathrm{X}-2)=\mathrm{X}+1=(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}_{1,1}$. On a alors $\mathrm{P}_{2,2}=-\mathrm{P}_{2,1}(0)=2$.

b. Il suffit de vérifier que $\varphi_{3,2}(-2\mathrm{X}-4)=2\mathrm{X}=\mathrm{X}\mathrm{P}_{2,2}$.

16. a. Pour $i=1$, la somme au membre de droite se réduit au seul terme $\mathrm{P}_{1,1}(k)=1$ et $\mathcal{H}_1$ n'est donc qu'une reformulation de **7.a.**.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a d'après **5.** et $\mathcal{H}_{i-1}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= (k+1)!\Big(i\,\mathbb{P}(X_k = i) + (3+k-i)\,\mathbb{P}(X_k = i-1)\Big) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \\ &= i(k+1)!\,\mathbb{P}(X_k = i) + (3+k-i)\sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k)j^k - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \\ &= i\alpha_k + \sum_{j=1}^{i-1}\big((3+k-i)P_{i-1,j}(k) - jP_{i,j}(k+1) + iP_{i,j}(k)\big)j^k = i\alpha_k\end{aligned}$$

car, par définition,

$$\forall j \in [\![1, i-1]\!]\,, \quad jP_{i,j}(k+1) - iP_{i,j}(k) = \varphi_{i,j}(P_{i,j})(k) = (3+k-i)P_{i-1,j}(k).$$

La suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est ainsi géométrique de raison i :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)!\,\mathbb{P}(X_k = i) = i^k\alpha_0 + \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k = \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k)j^k$$

car $\alpha_0 = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0) = P_{i,i}(k)$ par définition, d'où le résultat.

c. Il ne reste qu'à invoquer le principe de récurrence : l'initialisation a été établie en **a.** et l'hérédité en **b.**.

17. a. Il vient d'après **15.a.** et **16.** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{1}{(k+1)!}\big(P_{2,2}(k)2^k + P_{2,1}(k)\big) = \frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}.$$

b. D'après **15.b.** et **16.**,

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 3) &= \frac{1}{(k+1)!}\big(P_{3,3}(k)3^k + P_{3,2}(k)2^k + P_{3,1}(k)\big) \\ &= \frac{3^{k+1} - (k+2)2^{k+1} + \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1}{(k+1)!}.\end{aligned}$$