
1 ————— (*) —————

Notons E l'ensemble de fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel des éléments de E qui s'annulent en 0 et en 1. Déterminer $F^\perp$ pour le produit scalaire

$$f|g = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Soit f un élément de $F^\perp$. Alors, pour toute fonction g s'annulant en 0 et 1, on a

$$\int_0^1 f(t)g(t) dt = 0$$

On applique ce résultat avec $g : t \mapsto t(1-t)f(t)$, qui est bien un élément de F . Il vient

$$\int_0^1 t(1-t)f(t)^2 dt = 0$$

La fonction $t \mapsto t(1-t)f(t)^2$ étant continue et positive, elle est donc identiquement nulle sur $[0; 1]$, donc f est nulle sur $]0; 1[$. Par continuité, elle est également nulle en 0 et en 1. Finalement, on vient de justifier que

$$F^\perp = \{0\}$$

2 ————— (**) —————

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$P|Q = \int_a^b P(t)Q(t) dt$$

- (a). Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les polynômes $Q_1, \dots, Q_n$ par

$$Q_1(x) = \int_a^x P_0(t) dt \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket, \quad Q_k(x) = \int_a^x Q_{k-1}(t) dt$$

Montrer que ces éléments sont divisibles respectivement par $(X-a)(X-b)$, $(X-a)^2(X-b)^2$, $\dots$, $(X-a)^n(X-b)^n$.

- (c). En déduire que pour tout entier n , il existe un réel k_n à déterminer tel que

$$P_n = k_n [(X-a)^n(X-b)^n]^{(n)}$$

-
- (a) L'existence d'une telle suite est assurée par le procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt. En appliquant ce procédé à la base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[X]$, on définit par récurrence la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = X^n - \sum_{k=0}^n \frac{(P_k|X^n)}{||P_k||^2} P_k$$

Cette construction fournit une suite orthogonale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes, échelonnée en degré, et à coefficients réels (récurrence immédiate, les produits scalaires étant tous réels). La famille est de plus constitué de polynômes de coefficient dominant 1 par définition.

Reste à montrer l'unicité. Pour cela, il suffit de remarquer que par construction, pour tout entier n ,

$$P_n \in \mathbb{C}_n[X] \cap (\mathbb{C}_{n-1}[X])^\perp$$

Or, cette espace est un espace vectoriel de dimension 1 donc il contient un unique polynôme unitaire, ce qui établit l'unicité de P_n . Ainsi,

Il existe une unique base orthogonale et échelonnée en degré $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[X]$ dont les éléments sont unitaires. Ces polynômes sont alors à coefficients réels.

- (b) Posons par convention $Q_0 = P_n$. Il est clair que pour tout $n \geq 1$, on a $Q'_n = Q_{n-1}$. De plus, tous les polynômes $Q_1, \dots, Q_n$ s'annulent en a . Montrons qu'il en est de même pour b . Dans un premier temps, on a

$$Q_1(b) = \int_a^b P_n(t) dt = (1|P_n)$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on obtient en intégrant par parties l'égalité

$$\int_a^b Q_k(t) dt = [(t-b)Q_k(t)]_a^b - \int_a^b (t-b)Q'_k(t) dt$$

Le crochet est nul car Q_k s'annule en a et $(t-b)$ en b . Ainsi,

$$\int_a^b Q_k(t) dt = \int_a^b (b-t)Q_{k-1}(t) dt$$

En réitérant cette intégration par parties k fois, il vient

$$\int_a^b Q_k(t) dt = \frac{1}{k!} \int_a^b (b-t)^k Q_0(t) dt \quad \text{soit} \quad Q_{k+1}(b) = \frac{1}{k!} \int_a^b (b-t)^k P_n(t) dt = \frac{1}{k!} ((b-X)^k |P_n)$$

ce qui généralise la première égalité. Mais par construction, P_n est orthogonal à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ donc le produit scalaire $((b-X)^k |P_n)$ est nul pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. En vertu des égalités précédentes, on en déduit l'annulation en b également de $Q_1, \dots, Q_n$.

On en déduit finalement que a et b sont des racines de multiplicités k de Q_k pour tout entier $k \geq 1$, et ainsi

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{ le polynôme } P_k \text{ est divisible par } (X-a)^k(X-b)^k.}$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme P_n est de degré n . Par intégration successives, le polynôme Q_n est donc de degré $2n$. Or, ce dernier est également divisible par $(X-a)^n(X-b)^n$ d'après ce qui précède. Par suite, il existe un réel C tel que

$$Q_n = C(X-a)^n(X-b)^n \quad \text{et} \quad P_n = C[(X-a)^n(X-b)^n]^{(n)}$$

On détermine la constante C en se rappelant que P_n est unitaire. Le coefficient dominant de Q_n vaut C , donc après n dérivation, celui de P_n vaut $C(2n)(2n-1)\cdots(n+1) = C(2n)!/n!$. Ainsi $C = n!/(2n)!$ et on peut donc conclure

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \frac{n!}{(2n)!} [(X-a)^n(X-b)^n]^{(n)}}$$

3

(**)

CCP PC 2011

Soit $E = \mathcal{C}^2([0;1], \mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur E en posant

$$f|g = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$$

et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On pose

$$\mathcal{V} = \{f \in E, f'' = f\} \quad \mathcal{W} = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \{f \in E, f(0) = \text{ch}(1) \quad \text{et} \quad f(1) = 1\}$$

- (a) Montrer que (ch, sh) est une base de $\mathcal{V}$.

- (b) Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in E$, montrer que

$$f|g = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$$

Calculer $\text{ch}|\text{sh}$, $\|\text{ch}\|^2$ et $\|\text{sh}\|^2$.

- (c) Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{W}$, montrer que $f|g = 0$.

- (d) Soit $f \in \mathcal{H}$. Calculer $f|\text{ch}$ et $f|\text{sh}$. En déduire les coordonnées dans la base (ch, sh) de la projection orthogonale de f sur $\mathcal{V}$.

- (e) Déterminer $\inf \left\{ \int_0^1 (f'(t)^2 + f(t)^2) dt, f \in \mathcal{H} \right\}$.

- (f) Montrer que $\mathcal{W}$ est l'orthogonal de $\mathcal{V}$.

- (a) C'est du cours ! L'équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$, de racines 1 et -1 . Une base des solutions est donnée par $\{t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t}\}$. On vérifie alors facilement que (ch, sh) en est une autre.

$$\boxed{\text{La famille } (\text{ch}, \text{sh}) \text{ est une base de } \mathcal{V}.}$$

(b) Soit $f \in \mathcal{V}$ et $g \in E$. Alors, $f'' = f$ de sorte que

$$f|g = \int_0^1 (f''(t)g(t) + f'(t)g'(t)) \, dt = [f'(t)g(t)]_0^1$$

soit bien

$$f|g = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$$

Sachant que ch et sh sont à la fois dans E et $\mathcal{V}$, on en déduit que

$$\text{ch}|\text{sh} = \text{sh}(1)^2 \quad \text{et} \quad \|\text{ch}\|^2 = \|\text{sh}\|^2 = \text{ch}(1)\text{sh}(1)$$

(c) C'est une conséquence immédiate du (b).

$$\forall f \in \mathcal{V}, \quad \forall g \in \mathcal{W}, \quad f|g = 0$$

(d) On peut encore utiliser le résultat de la question (b), puisque ch et sh sont des éléments de $\mathcal{V}$. Ainsi, on obtient directement

$$f|\text{ch} = \text{sh}(1)f(1) - \text{sh}(0)f(0) \quad \text{et} \quad f|\text{sh} = \text{ch}(1)f(1) - \text{ch}(0)f(0)$$

soit puisque $f \in \mathcal{H}$,

$$f|\text{ch} = \text{sh}(1) \quad \text{et} \quad f|\text{sh} = 0$$

Notons maintenant $p_{\mathcal{V}}(f)$ le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{V}$. Il existe deux réels λ et μ tels que

$$p_{\mathcal{V}}(f) = \lambda \text{ch} + \mu \text{sh}$$

Puisque $f - p_{\mathcal{V}}(f)$ est orthogonal à $\mathcal{V}$, il vient par produit scalaire avec ch et sh le système

$$\begin{cases} f|\text{ch} - \lambda \|\text{ch}\|^2 - \mu \text{ch}|\text{sh} = 0 \\ f|\text{sh} - \lambda \text{ch}|\text{sh} - \mu \|\text{sh}\|^2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \lambda \text{ch}(1)\text{sh}(1) + \mu \text{sh}(1)^2 = \text{sh}(1) \\ \lambda \text{sh}(1)^2 + \mu \text{ch}(1)\text{sh}(1) = 0 \end{cases}$$

Les formules de Cramer donnent ainsi

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} \text{sh}(1) & \text{sh}(1)^2 \\ 0 & \text{ch}(1)\text{sh}(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ch}(1)\text{sh}(1) & \text{sh}(1)^2 \\ \text{sh}(1)^2 & \text{ch}(1)\text{sh}(1) \end{vmatrix}} = \frac{\text{ch}(1)\text{sh}(1)^2}{\text{sh}(1)^2(\text{ch}(1)^2 - \text{sh}(1)^2)} = \text{ch}(1) \quad \text{puis} \quad \mu = -\text{sh}(1)$$

Ainsi,

$$\text{Les coordonnées du projeté orthogonal } p_{\mathcal{V}}(f) \text{ de } f \text{ sur } \mathcal{V} \text{ dans la base } (\text{ch}, \text{sh}) \text{ sont données par } (\text{ch}(1), -\text{sh}(1)).$$

(e) D'après le théorème de Pythagore, pour tout $f \in \mathcal{H}$,

$$\|f\|^2 = \|p_{\mathcal{V}}(f)\|^2 + \|f - p_{\mathcal{V}}(f)\|^2$$

Le calcul précédent montre que $p_{\mathcal{V}}(f)$ est indépendant du choix de f , et vaut $f_0 = \text{ch}(1)\text{ch} - \text{sh}(1)\text{sh}$. On en déduit grâce à l'égalité ci-dessus que

$$\|f\|^2 \geq \|f_0\|^2 = \|\text{ch}(1)\text{ch} - \text{sh}(1)\text{sh}\|^2$$

avec égalité si et seulement si $f = f_0$. Or, f_0 est bien un élément de $\mathcal{H}$ donc le minorant précédent est atteint. Pour finir, puisque f_0 appartient à $\mathcal{V}$, la question (b) montre que

$$\|f_0\|^2 = f'_0(1)f_0(1) - f'_0(0)f_0(0) = \text{ch}(1)\text{sh}(1)$$

et finalement

$$\inf \left\{ \int_0^1 (f'(t)^2 + f(t)^2) \, dt, \, f \in \mathcal{H} \right\} = \text{ch}(1)\text{sh}(1)$$

(f) D'après la question (c), on a $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}^\perp$. Réciproquement, si w est un élément de $\mathcal{V}^\perp$, alors d'après la question (b), puisque ch et sh sont dans $\mathcal{V}$,

$$w|\text{ch} = 0 = \text{sh}(1)w(1) - \text{sh}(0)w(0) \quad \text{et} \quad w|\text{sh} = 0 = \text{ch}(1)w(1) - \text{ch}(0)w(0)$$

La première égalité montre que $w(1) = 0$, après quoi la seconde montre que $w(0) = 0$. Finalement, w appartient à $\mathcal{W}$ ce qui établit l'inclusion réciproque. Ainsi,

$$\mathcal{W} = \mathcal{V}^\perp$$

4 ————— (*) —————

Soit x et y deux vecteurs distincts d'un espace E euclidien de dimension supérieur ou égale à 2. On suppose que $(x|y) = \|y\|^2$. Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que la projection orthogonale de x sur H soit égale à y .

Sous réserve d'existence de H , on note u un vecteur non nul orthogonal à H . Alors, par définition du projeté orthogonal, $x - y$ est colinéaire à u . Ainsi,

$$H = \text{Vect} \{u\}^\perp = \text{Vect} \{x - y\}^\perp$$

Réciproquement, notons H l'orthogonal de $\{x - y\}$. Par hypothèse,

$$(x|y) = \|y\|^2 = (y|y) \quad \text{soit} \quad (x - y|y) = 0 \quad \text{d'où} \quad y \in \{x - y\}^\perp = H$$

On peut donc écrire $x = (x - y) + y$ avec $y \in H$ et $x - y$ orthogonal à H , ce qui prouve que le projeté orthogonal de x sur H est bien y . Par conséquent,

L'hyperplan $\{x - y\}^\perp$ est l'unique hyperplan tel que y soit le projeté orthogonal de x sur H .

5 ————— (**) —————

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Démontrer l'existence et l'unicité d'une base $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ de E telle que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad (e_i|f_j) = \delta_{i,j} \quad (\star)$$

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Sous réserve d'existence, on a

$$\forall i \neq j, \quad f_j \perp e_i \quad \text{soit} \quad f_j \in \left(\text{Vect} \{e_i\}_{i \neq j} \right)^\perp$$

Notons que l'orthogonal de $\text{Vect} \{e_i\}_{i \neq j}$ est une droite vectorielle. Considérons une base $\{a_j\}$ de cette droite. Nécessairement, f_j et a_j sont colinéaires de sorte qu'il existe un scalaire λ_j tel que $f_j = \lambda_j a_j$. Par suite,

$$f_j|e_j = \lambda_j (a_j|e_j) = 1$$

Cela impose que $\lambda_j = 1/(a_j|e_j)$ sous réserve que ce produit scalaire soit non nul. Mais si c'était le cas, on aurait

$$e_j \perp \text{Vect} \{a_j\} = \text{Vect} \{e_i\}_{i \neq j}$$

ce qui est absurde car $\{e_1, \dots, e_n\}$ est libre. Pour conclure, on a donc nécessairement

$$f_j = \frac{a_j}{a_j|e_j} \quad \text{avec} \quad \left(\text{Vect} \{e_i\}_{i \neq j} \right)^\perp = \text{Vect} \{a_j\} \quad (\star\star)$$

Ce raisonnement assure donc l'unicité d'une famille vérifiant $(\star)$.

Réciproquement, toute famille ainsi définie vérifie clairement la propriété $(\star)$. Reste à montrer qu'il s'agit d'une base de E . Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tels que

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$$

alors en considérant $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et en faisant le produit scalaire avec e_j , il vient aussitôt $\lambda_j = 0$ par bilinéarité et $(\star)$. Finalement, la famille est libre et c'est donc une base de E puisqu'elle est de cardinal égal à la dimension de E . Pour conclure,

Il existe une unique base $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ de E telle que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad (e_i|f_j) = \delta_{i,j}$$

6 ————— (**) ————— **Mines PC 2010**

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ 1-lipschitzienne. Montrer que $E = \text{Im}(u - I_d) \oplus^\perp \text{Ker}(u - I_d)$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim \text{Im}(u - I_d) + \dim \text{Ker}(u - I_d) = \dim E$

Par conséquent, il suffit de montrer que les deux espaces $\text{Im}(u - I_d)$ et $\text{Ker}(u - I_d)$ sont orthogonaux pour en déduire qu'ils sont d'intersection nulle et donc supplémentaires orthogonaux. Soit donc $x \in \text{Ker}(u - I_d)$ et $y \in \text{Im}(u - I_d)$. Par définition, on a donc $u(x) = x$ et l'existence de $a \in E$ tel que $y = u(a) - a$ de sorte que

$$x|y = u(x)|(u(a) - a) = u(x)|u(a) - u(x)|a = u(x)|u(a) - x|a$$

Remarquons alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|u(a + \lambda x)\|^2 = \|u(a)\|^2 + 2\lambda (u(x)|u(a)) + \lambda^2 \|u(x)\|^2$$

et de même

$$\|a + \lambda x\|^2 = \|a\|^2 + 2\lambda (x|a) + \lambda^2 \|x\|^2$$

et ainsi

$$\|u(a + \lambda x)\|^2 - \|a + \lambda x\|^2 = 2\lambda \underbrace{(u(x)|u(a) - x|a)}_{x|y} + \|u(a)\|^2 - \|a\|^2$$

L'endomorphisme u étant 1 lipschitzien, la quantité de gauche est majorée, donc celle de droite également. Cela impose nécessairement $x|y = 0$ et on a bien $\text{Ker}(u - I_d)$ et $\text{Im}(u - I_d)$ orthogonaux. D'après ce qui précède, il vient

$$\boxed{= \text{Im}(u - I_d) \oplus^\perp \text{Ker}(u - I_d)}$$

7 _____ (**) _____

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

(a). Soient $f_1, \dots, f_n \in E$ tels que $\sum_{k=1}^n \|f_k\|^2 < 1$. Montrer que la famille $(e_i + f_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de E .

(b). Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs unitaires tels que $\sum_{k=1}^n (v_k|e_k) > n - \frac{1}{2}$. Montrer que $(v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de E .

(a) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1(e_1 + f_1) + \dots + \lambda_n(e_n + f_n) = 0$

L'égalité se réécrit $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = -\lambda_1 f_1 - \dots - \lambda_n f_n$

d'où $\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n\| = \|\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n\|$

Puisque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, il vient

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n\| = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)^{1/2}$$

Par ailleurs, par inégalité triangulaire,

$$\|\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n\| \leq |\lambda_1| \|f_1\| + \dots + \lambda_n \|f_n\|$$

puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$,

$$|\lambda_1| \|f_1\| + \dots + \lambda_n \|f_n\| \leq (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)^{1/2} \left(\|f_1\|^2 + \dots + \|f_n\|^2 \right)^{1/2}$$

Si l'on note $\lambda = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)^{1/2}$ et $\rho = \left(\|f_1\|^2 + \dots + \|f_n\|^2 \right)^{1/2}$, on obtient finalement

$$\lambda \leq \lambda \rho \quad \text{soit} \quad \lambda(1 - \rho) \leq 0$$

Puisque $\rho < 1$ par hypothèse et $\lambda \geq 0$ par définition, il vient nécessairement $\lambda = 0$ et donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Par conséquent, la famille $(e_i + f_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est libre et de cardinal n . Ainsi,

$$\boxed{\text{La famille } (e_i + f_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \text{ est une base de } E.}$$

(b) Notons $f_k = v_k - e_k$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Alors,

$$\|f_k\|^2 = \|v_k\|^2 + \|e_k\|^2 - 2v_k|e_k = 2(1 - v_k|e_k)$$

d'où par somme

$$\sum_{k=1}^n \|f_k\|^2 = 2 \left(n - \sum_{k=1}^n v_k|e_k \right)$$

Par hypothèse, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^n \|f_k\|^2 < 2 \left(n - \left(n - \frac{1}{2} \right) \right) = 1$$

Le résultat du (a) peut s'appliquer et prouve que la famille $(e_k + f_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est libre. Compte tenu du choix de f_k , cela signifie que $(v_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est libre. Puisqu'elle est de cardinal n ,

$$\boxed{\text{La famille } (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \text{ est une base de } E.}$$

8

(**)

X PC 2010

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer

$$\sup \left\{ \int_{-1}^1 xP(x), P \in E / \int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 P(t) dt = 0 \right\}$$

L'application $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur E que l'on note $P|Q$ dans toute la suite. Notons de plus H l'orthogonal de $\{1\}$ dans E . On est alors ramené à maximiser la quantité $(X|P)$ sur l'intersection K de la boule unité de E et de l'hyperplan H . Au passage, on peut remarquer que ce maximum existe car l'application $P \mapsto X|P$ est linéaire donc continue sur le compact K .

Commençons donc dans un premier temps par déterminer le projeté orthogonal $p(X)$ de X sur H . Pour cela, on calcule son projeté $p'(X)$ sur $\text{Vect}\{1\}$, donné par

$$p'(X) = (X|1) \frac{1}{\|1\|^2} = \frac{\int_{-1}^1 t dt}{\int_{-1}^1 1^2 dt} = 0$$

On en déduit donc que X est orthogonal à 1 donc élément de H lui-même. Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la quantité $(X|P)$ pour P quelconque dans K . Il vient

$$|(X|P)| \leq \|X\| \|P\| = \|X\|$$

puisque P est un élément de K donc un vecteur unitaire. On sait que l'inégalité est une égalité lorsque P et X sont colinéaire. Etant donné que

$$\|X\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

on en déduit que le maximum cherché vaut $\sqrt{2/3}$, et qu'il est atteint pour $P = \pm X \sqrt{3/2}$.

$$\sup \left\{ \int_{-1}^1 xP(x), P \in E / \int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 P(t) dt = 0 \right\} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Note : La méthode se généralise dans n'importe quel espace euclidien E . Si x_0 est un élément fixé de E et H un sous-espace vectoriel de E , alors en notant $x_0 = y_0 + z_0$ avec $y_0 \in H$ et $z_0 \in H^\perp$, on a

$$\sup_{x \in H \cap S(0,1)} (x_0|x) = \sup_{x \in H \cap S(0,1)} (y_0|x) = \|y_0\|$$

9

(*)

Soit f un endomorphisme orthogonal de E euclidien.

- Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $(f(F))^\perp = f(F^\perp)$.
- Si $F = \text{Ker}(f - I_d)$, montrer que $f(F^\perp) = F^\perp$.

- Dans un premier temps, remarquons que f étant un isomorphisme (comme tout endomorphisme orthogonal), on a

$$\dim f(F) = \dim F \quad \text{et} \quad \dim f(F^\perp) = \dim F^\perp$$

$$\text{De plus} \quad \dim(f(F))^\perp = \dim E - \dim f(F) \quad \text{et} \quad \dim F^\perp = \dim E - \dim F$$

On déduit de tout ceci que $(f(F))^\perp$ et $f(F^\perp)$ ont même dimension, donc il suffit de démontrer une inclusion pour aboutir à l'égalité des ensembles.

Soit x un élément de $f(F^\perp)$. Alors, il existe $a \in F^\perp$ tel que $x = f(a)$. Si maintenant y est un élément de $f(F)$, on peut trouver $b \in F$ tel que $y = f(b)$. Or, f conserve le produit scalaire donc

$$x|y = f(a)|f(b) = a|b = 0 \quad \text{car} \quad a \in F^\perp \quad \text{et} \quad b \in F$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in f(F)$, on en déduit que $f(F^\perp)$ est inclus dans $(f(F))^\perp$. Par conséquent,

$$(f(F))^\perp = f(F^\perp)$$

- (b) Puisque $f(F^\perp)$ est de même dimension que $F^\perp$, il suffit à nouveau de prouver une inclusion pour conclure. Justifions donc la stabilité de $F^\perp$ par f . Soit $y \in F^\perp$ et $z = f(y)$. Pour tout $x \in F$, on a $f(x) = x$ par définition de F . Ainsi, par conservation du produit scalaire,

$$z|x = f(y)|f(x) = x|y = 0 \quad \text{car} \quad x \in F \quad \text{et} \quad y \in F^\perp$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in F$, on a bien $z \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par f . D'après la remarque précédente,

$$\boxed{\text{Si } F = \text{Ker}(f - I_d), \text{ alors } f(F^\perp) = F^\perp.}$$

10

(*)

Soit E un espace euclidien, a un élément non nul de E et enfin α un réel non nul. On note

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x + \alpha(a|x)a \end{aligned}$$

- (a). Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
 (b). A quelle condition sur a et α l'endomorphisme f est-il orthogonal ? Quelle est alors sa nature géométrique ?

- (a) Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé. Alors,

$$x + \alpha(a|x)a = \lambda x \quad \text{soit} \quad (\lambda - 1)x = \alpha(a|x)a$$

Si (a, x) est libre, il vient nécessairement $\lambda = 1$ et $a|x = 0$ car α , x et a sont non nuls. Si x est colinéaire à a , on peut supposer $x = a$ et on obtient alors $\lambda = 1 + \alpha \|a\|^2$. Réciproquement, on vérifie immédiatement que les valeurs 1 et $1 + \alpha \|a\|^2$ sont valeurs propres de a , d'espaces propres associés respectifs $a^\perp$ et $\text{Vect}\{a\}$.

L'endomorphisme f admet pour valeurs propres les scalaires 1, d'espace propre associé $a^\perp$, et $1 + \alpha \|a\|^2$, d'espace propre associé $\text{Vect}\{a\}$.

- (b) Un endomorphisme orthogonal ne peut avoir que 1 et -1 pour valeurs propres réelles. La quantité $\alpha \|a\|^2$ étant non nulle par hypothèse, f est orthogonal seulement si $\alpha = -2/\|a\|^2$. Dans ce cas, on a deux valeurs propres 1 et -1 , d'espaces propres associés $a^\perp$ et $\text{Vect}\{a\}$. On reconnaît aussitôt la réflexion par rapport à $a^\perp$.

L'endomorphisme f est orthogonal si et seulement si $\alpha = -2/\|a\|^2$, auquel cas il s'agit de la réflexion orthogonale par rapport à $a^\perp$.

11

(**)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique. On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

- (a). Montrer que $A + I_3$ est inversible, puis que $\Omega = (A + I_3)^{-1}(I_3 - A)$ est orthogonale.
 (b). Justifier que -1 n'est pas valeur propre de Ω . Que peut-on dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à Ω ?
 (c). Réciproquement, toute élément de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ n'admettant pas le réel -1 pour valeur propre peut-il s'écrire sous forme $(A + I_3)^{-1}(I_3 - A)$ avec A antisymétrique ?

- (a) Il suffit de montrer que $\text{Ker}(A + I_3) = \{0\}$, c'est-à-dire que -1 n'est pas valeur propre de A . Effectivement, s'il existe X tel que $AX = -X$, alors,

$${}^tXAX = -\|X\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. En transposant la matrice scalaire tXAX , il vient

$${}^t({}^tXAX) = {}^tX^tAX = -{}^tXAX \quad \text{d'où} \quad -\|X\|^2 = \|X\|^2$$

Il s'ensuit que X est nul ce qui est absurde car c'est un vecteur propre. Finalement, -1 n'est pas valeur propre et

La matrice $A + I_3$ est inversible.

Pour montrer que Ω est orthogonale, il suffit de calculer son inverse. Alors,

$$\Omega^{-1} = (I_3 - A)^{-1}(A + I_3)$$

Par ailleurs, puisque l'inverse d'une transposée est la transposée de l'inverse,

$${}^t\Omega = (I_3 - {}^tA)({}^tA + I_3)^{-1} = (A + I_3)(I_3 - A)^{-1}$$

Le produit n'étant pas dans le bon sens, il faut justifier la commutativité du produit. C'est le cas car toute matrice commute avec son inverse. Ainsi, $(I_3 - A)^{-1}$ commute avec $I_3 - A$, et donc avec $(I_3 - A) - 2I_3$ soit $-I_3 - A$ et donc avec $I_3 + A$. Par suite,

La matrice $\Omega = (A + I_3)^{-1}(I_3 - A)$ est orthogonale.

(b) Soit X tel que $\Omega X = -X$. Alors

$$(A + I_3)^{-1}(I_3 - A)X = -X \quad \text{soit} \quad X - AX = -(AX + X) \quad \text{d'où} \quad X = 0$$

Ainsi, $\text{Ker}(\Omega + I_3) = \{0\}$ et

Le scalaire -1 n'est pas valeur propre de Ω .

Le spectre réel d'une matrice orthogonale est inclus dans $\{-1, 1\}$. La matrice Ω n'a donc que 1 comme valeur propre réelle. Par conséquent, elle admet soit 1 comme valeur propre de multiplicité 3, soit 1 comme valeur propre de multiplicité 1 et deux autres complexes conjugués. Dans les deux cas, son déterminant est positif, donc égal à 1 (car c'est une matrice orthogonale). Le cours de première année assure alors qu'il s'agit nécessairement d'une rotation. De plus, son angle est différent de π sans quoi on aurait -1 pour valeur propre.

La matrice Ω est une matrice de rotation d'angle distinct de π (modulo 2π).

(c) Considérons le cas où $b = c = 0$. On note $a = \tan \theta$ avec $|\theta| < \pi/2$. Alors,

$$A + I_3 = \frac{1}{\cos \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 - A = \frac{1}{\cos \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Les blocs de taille 2 en haut à gauche sont des matrices de rotations. On en déduit que

$$(A + I_3)^{-1} = \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1/\cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant O un élément de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ n'admettant pas -1 pour valeur propre. Comme à la question (b), on sait qu'il s'agit d'une matrice de rotation d'angle α distinct de π modulo 2π . Il existe alors une matrice orthogonale R telle que

$${}^tROR = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul précédent montre que l'on peut écrire

$${}^tROR = (B + I_3)^{-1}(I_3 - B) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \tan(\alpha/2) & 0 \\ \tan(\alpha/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice B est bien définie puisque $\alpha/2 \neq \pi/2[\pi]$. Il suffit alors de poser $A = RB^tR$ pour avoir B antisymétrique (car B l'est) et l'égalité $O = (A + I_3)^{-1}(I_3 - A)$. Par conséquent,

Toute matrice orthogonale n'admettant pas -1 pour valeur propre peut s'écrire sous la forme $(A + I_3)^{-1}(I_3 - A)$ avec A antisymétrique.

12

(**)

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que f a une trace nulle si et seulement si il existe une base orthonormée dans laquelle f a une matrice dont la diagonale ne comporte que des 0.

L'une des implications étant évidente, on se contente de justifier l'autre. Commençons par justifier le lemme. Soit f de trace nulle et symétrique. Il existe une base orthonormée de diagonalisation de f , que l'on note $(e_1, \dots, e_n)$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Posons alors

$$u = \frac{1}{\sqrt{n}}(e_1 + \dots + e_n) \quad \text{d'où} \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$$

Ainsi,

$$u|f(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j e_i | e_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Or, la somme des valeurs propres est égale à la trace de f qui est nulle par hypothèse. On a bien u et $f(u)$ orthogonaux et u est unitaire par définition.

Il existe u unitaire tel que u et $f(u)$ soient orthogonaux.

Démontrons maintenant le résultat par récurrence sur la dimension n de E . Si $n = 1$, le résultat est évident car f est de trace nulle donc nul, et toute base orthonormée convient. Supposons maintenant la propriété vraie pour tout endomorphisme symétrique de trace nulle d'un espace de dimension $n - 1$. Soit E de dimension n . D'après le lemme, il existe un vecteur u tel que u et $f(u)$ soient orthogonaux. On complète alors $\{u\}$ en une base orthonormée de E quelconque. La matrice de f dans cette base est donc de la forme

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ \star & & & \\ \vdots & & B & \\ \star & & & \end{pmatrix}$$

avec A symétrique et donc B symétrique de taille $n - 1$. La trace de A , c'est-à-dire celle de f , est alors clairement égale à celle de B . Appliquons maintenant l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme g canoniquement associé à f , qui est ainsi de trace nulle et symétrique en dimension $n - 1$. Matriciellement, on en déduit l'existence de $O \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que tOBO soit de diagonale nulle. Posons alors

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & O & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{auquel cas} \quad {}^tR = R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & {}^tO & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

de sorte que R est orthogonale, puis par produit par blocs,

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ \star & & & \\ \vdots & & {}^tOBO & \\ \star & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \cdots & \star & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on interprète R comme la matrice de passage de la b.o.n. $\mathcal{B}$ à une autre b.o.n. $\mathcal{B}'$, on a finalement $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de la forme souhaitée. Cela justifie le résultat pour tout endomorphisme symétrique de trace nulle en dimension n et achève la récurrence.

Un endomorphisme f symétrique d'un espace euclidien E est de trace nulle si et seulement si il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f a des éléments diagonaux nuls.

13 _____ (*) _____ **CCP PC 2009**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{10} = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. De plus, elle est annulée par le polynôme $X^{10} - 1$, donc ses valeurs propres sont parmi les racines de ce polynôme. Les seules racines réelles étant -1 et 1 , A est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent -1 ou 1 .

On en déduit que A^2 est semblable à une matrice diagonale avec uniquement la valeur 1 sur la diagonale, c'est-à-dire I_n . L'identité n'étant semblable qu'à elle-même, il vient

$$A^2 = I_n$$

14 _____ (***) _____

Soit E un espace euclidien et p, q deux projections orthogonales de E .

- (a). Montrer que le spectre de $p + q$ est non vide.
- (b). Soit λ une valeur propre de $p + q$ et x un vecteur propre associé. Montrer que $\text{Vect}\{x, p(x)\}$ est stable à la fois par p et par q . En déduire que E est somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 1 ou 2 stables par p et q .
- (c). Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

- (a) Les endomorphismes p et q sont des projecteurs orthogonaux, donc des endomorphismes symétriques. Leur somme reste symétrique et donc diagonalisable. Notamment,

Le spectre de $p + q$ est non vide.

- (b) On a d'une part $p(x) = p(x)$ et $p(p(x)) = p^2(x) = p(x)$

car p est un projecteur, et d'autre part par définition $(p + q)(x) = \lambda x$ d'où

$$q(x) = \lambda x - p(x) \quad \text{puis} \quad q(p(x)) = \lambda q(x) - q^2(x) = (\lambda - 1)q(x) = (\lambda - 1)(\lambda x - p(x))$$

Ces égalités assurent bien que

Le sous-espace vectoriel engendré par x et $p(x)$ est stable par p et q .

Par la suite, on raisonne par récurrence sur la dimension de E . Pour $n \leq 2$, le résultat est évident (E est la somme restreinte à lui-même, qui est un sous-espace vectoriel de dimension 2). Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$, c'est à dire que :

« Quels que soient deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien de dimension au plus $n - 1$, on peut écrire E comme somme directe de sevs de dimension au plus 2 stable par les deux projecteurs. »

Soit alors E de dimension n et p, q deux projecteurs orthogonaux. D'après ce qui précède, il existe au moins un vecteur x non nul tel que $F = \text{Vect}x, p(x)$ est stable par p et q . Il est de plus clairement de dimension au plus 2. Notons $G = F^\perp$. Par symétrie de p et q , G est également stable par p et q . De plus, les induits $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ sur G restent des projecteurs symétriques, donc des projecteurs orthogonaux. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence. Le sous-espace vectoriel G se décompose comme somme directe d'espaces de dimension au plus 2 stables par $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$, donc stables par p et q . En rajoutant F à cette somme directe, on a le résultat pour E (puisque $F \oplus G = E$).

La propriété est donc vraie au rang n , donc pour tout entier n par récurrence. Ainsi,

L'espace E est la somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension au plus 2 stables par p et q .

- (c) Compte tenu du résultat du (b), il suffit de démontrer que le résultat est vrai en dimension 1 et 2. En effet, il ne restera plus qu'à l'appliquer ensuite à l'endomorphisme induit par $p \circ q$ sur chaque sous-espace stable par p et q pour obtenir une base de vecteurs propres pour $p \circ q$ de chacun de ces espaces, dont la réunion forme une base de E vecteurs propres. Le cas $n = 1$ est évident (tout endomorphisme est diagonalisable). Pour $n = 2$, le cas $p = 0$ ou $p = I_d$ est également évident. Dans le dernier cas, p est un projecteur orthogonal de rang 1. On peut trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de p est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En ce qui concerne q , puisqu'il est symétrique et que $\mathcal{B}$ est orthogonale, sa matrice dans cette base est symétrique. Notons

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{de sorte que} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p \circ q) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si a est non nul, cette matrice est diagonalisable car elle admet deux valeurs propres distinctes. Si a est nul, on vérifie que b l'est nécessairement puisque q étant un projecteur

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} b^2 & bc \\ bc & b^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, $p \circ q$ est nul et donc à nouveau diagonalisable. On peut donc conclure.

L'endomorphisme $p \circ q$ est diagonalisable.

15

(**)

Soient $a < b$ deux réels et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \quad \text{avec} \quad \forall i, j, \quad a_{i,j} = \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt$$

- (a). Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ puis que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
 (b). En déduire que $(1/(i + j - 1))_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

La matrice A est clairement symétrique. Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt$$

Par linéarité de l'intégrale, on peut écrire

$${}^tXAX = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j f_j(t) \right) dt = \int_a^b g(t)^2 dt \quad \text{avec} \quad g = \sum_{i=1}^n x_i f_i$$

La quantité tXAX est l'intégrale d'une fonction positive et continue, elle est donc continue et ce, quel que soit X . Ainsi,

La matrice A est symétrique positive.

Supposons la famille $(f_1, \dots, f_n)$ libre. On conserve les notations précédentes. Si tXAX est nul, on en déduit que la fonction continue g a un carré d'intégrale nulle sur $[a; b]$. Elle est donc nulle, et par hypothèse de liberté, les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont tous nuls d'où $X = 0$. La matrice A est donc définie positive.

Réciproquement, si $(f_1, \dots, f_n)$ est liée, il existe un choix non trivial des scalaires $x_1, \dots, x_n$ pour que g soit nulle. Dès lors, tXAX est nul sans que X le soit. On a donc justifié l'équivalence.

La matrice A est définie positive si et seulement si $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Enfin, en prenant $[a; b] = [0; 1]$ et $f_i : t \mapsto t^{i-1}$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt$$

Cela permet d'appliquer tout ce qui précède (dans le cas où la famille est libre, ce qui est clairement le cas ici). Par suite,

La matrice $(1/(i+j-1))_{1 \leq i, j \leq n}$ est symétrique, définie positive.

16

(**)

Mines PC 2008

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = A^3 + A + I_n$. Justifier qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(B)$.

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc une matrice $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, un entier p , des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ deux à deux distincts et des entiers $n_1, \dots, n_p$ tels que

$$A = {}^tO \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_{n_p} \end{pmatrix} O \quad \text{et donc} \quad B = {}^tO \begin{pmatrix} \mu_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_p I_{n_p} \end{pmatrix} O$$

avec $\mu_k = \lambda_k^3 + \lambda_k + 1$ pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a ainsi

$$P(B) = {}^tO \begin{pmatrix} P(\mu_1) I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & P(\mu_p) I_{n_p} \end{pmatrix} O$$

On est donc ramené à trouver un polynôme vérifiant $P(\mu_k) = \lambda_k$ pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Il suffit de prendre pour cela un polynôme qui interpole les valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ aux points $\mu_1, \dots, \mu_p$. Un tel choix est possible dès lors que les $(\mu_k)_{1 \leq k \leq p}$ sont deux à deux distincts, ce qui est le cas car l'application $x \mapsto x^3 + x + 1$ est injective sur $\mathbb{R}$ (car strictement croissante). Par conséquent,

Il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(B) = A$.

17

(*)

Soit E un espace euclidien et $f, g \in \mathcal{S}(E)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

- (i) f et g commutent.
- (ii) $f \circ g \in \mathcal{S}(E)$.
- (iii) f et g admettent une base commune de vecteurs propres.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Alors, les matrices A et B de f et g dans cette base sont symétriques, et on a les équivalences :

$$AB \text{ symétrique} \iff {}^t(AB) = AB \iff {}^tB^t A = AB \iff BA = AB$$

On en déduit aussitôt l'équivalence (i) $\iff$ (iii). L'implication (iii) $\implies$ (i) étant évidente, il ne reste plus qu'à justifier que (i) $\implies$ (iii).

On raisonne pour cela par récurrence sur la dimension n de E . Pour $n = 1$, le résultat est évident car tout endomorphisme est une homothétie. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$, c'est-à-dire que

« Deux d'endomorphismes symétriques qui commutent dans un espace euclidien de dimension au plus $n - 1$ admettent une base commune de vecteurs propres. »

Soient f et g deux endomorphismes qui commutent d'un espace euclidien E de dimension n . Considérons maintenant une valeur propre λ quelconque de f (elle existe car f est diagonalisable) et F le sous-espace propre associé. Puisque f et g commutent, F est stable par g également. L'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f sur F est l'homothétie de rapport λ . Celui induit par g , noté $\tilde{g}$ reste symétrique donc diagonalisable en b.o.n. On peut ainsi prendre une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de F de vecteurs propres de $\tilde{g}$ (donc de g), qui est nécessairement une famille de vecteurs propres pour F par définition.

Remarquons pour finir que f et g étant symétriques, $F^\perp$ est stable par ces deux endomorphismes et est de dimension au plus $n - 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux deux endomorphismes induit par f et g sur $F^\perp$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $F^\perp$ constituée de vecteurs propres pour $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ (donc pour f et g). En réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, on obtient une base orthonormée de vecteurs propres communs à f et g . Le résultat est donc vrai au rang n , donc pour tout entier n par récurrence.

Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

18 ————— (**) —————

Soit n un entier. Notons $E = \mathbb{R}_n[X]$ et considérons $u : E \longrightarrow E$ définie par

$$u(P) = (1 + X^2)P' - nXP \quad \text{d'où} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(P)(x) = (1 + x^2)^{1+n/2} \frac{d}{dx} \left(\frac{P(x)}{(1 + x^2)^{n/2}} \right)$$

(a). Vérifier que l'application suivante est bien définie et est un produit scalaire sur E

$$(R, S) \longrightarrow R|S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(t)S(t)}{(1 + t^2)^{n+1}} dt$$

(b). Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique pour le produit scalaire ci-dessus, c'est-à-dire que

$$\forall R, S \in E, \quad (u(R)|S) = -(R|u(S))$$

Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

(a) Pour tous $R, S \in E$, RS est un polynôme de degré au plus $2n$ donc l'application $t \longmapsto R(t)S(t)/(1 + t^2)^{n+1}$ est dominée par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. Cela justifie que l'intégrale définissant $(R|S)$ est bien convergente.

L'application $(R, S) \longrightarrow (R|S)$ est alors clairement bilinéaire, symétrique et positive. Pour le caractère défini, la quantité $(R|R)$ est nulle si et seulement si $t \longmapsto R(t)^2/(1 + t^2)^{n+1}$ est identiquement nulle, soit lorsque R s'annule sur $\mathbb{R}$. Le polynôme R a alors une infinité de racines donc c'est le polynôme nul, ce qui établit le caractère défini. Finalement,

L'application $(R, S) \longmapsto (R|S)$ est un produit scalaire sur E .

(b) Soient R et S deux éléments de E . Une intégration par parties sur un segment $[a, b]$ donne

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{[u(R)](t)S(t)}{(1 + t^2)^{n+1}} dt &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{R(t)}{(1 + t^2)^{n/2}} \right) \frac{S(t)}{(1 + t^2)^{n/2}} dt \\ &= \left[\frac{R(t)S(t)}{(1 + t^2)^n} \right]_a^b - \int_a^b \frac{R(t)}{(1 + t^2)^{n/2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{S(t)}{(1 + t^2)^{n/2}} \right) dt \\ \int_a^b \frac{[u(R)](t)S(t)}{(1 + t^2)^{n+1}} dt &= \left[\frac{R(t)S(t)}{(1 + t^2)^n} \right]_a^b - \int_a^b \frac{R(t)[u(S)](t)}{(1 + t^2)^{n+1}} dt \end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto R(t)S(t)/(1 + t^2)^n$ admet la même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Plus précisément, cette limite est nulle si R ou S est de degré strictement inférieur à n . Sinon, elle est égale au produit des coefficients dominants de R et S . Dans les deux cas, le crochet a une limite nulle lorsque a tend vers $-\infty$ et b vers $+\infty$. En passant à la limite, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[u(R)](t)S(t)}{(1 + t^2)^{n+1}} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(t)[u(S)](t)}{(1 + t^2)^{n+1}} dt$$

En d'autres termes,

L'endomorphisme u est antisymétrique.

Pour déterminer les éléments propres, on considère un scalaire λ quelconque et P un polynôme tel que

$$u(P) = \lambda P \quad \text{soit} \quad (1 + X^2)P' - (\lambda + nx)P = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont le coefficient devant P' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel k tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = k \exp \left(\int_0^t \frac{\lambda + nu}{1 + u^2} du \right) = k(1 + t^2)^{n/2} \exp(\lambda \arctan t)$$

Si λ est valeur propre, ce calcul montre que l'espace propre est nécessairement de dimension 1. On cherche toutefois P sous la forme d'une fonction polynomiale. Pour cela, on prend dans un premier temps λ de la forme $\lambda = ip$ avec $p \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\exp(\lambda \arctan t) = (\cos \arctan t + i \sin \arctan t)^p$$

De plus,

$$\cos \arctan t = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \quad \text{et} \quad \sin \arctan t = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

et ainsi

$$P(t) = k(1 + t^2)^{(n-p)/2} (1 + it)^p$$

qui est bien polynomial lorsque $n - p$ est pair. De la même manière, si l'on note $\lambda = -ip$ avec $p \in \mathbb{N}$, on obtient

$$P(t) = k(1 + t^2)^{(n-p)/2} (1 - it)^p$$

qui reste polynomiale. On déduit de cette analyse que pour tout entier $p \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$, le complexe ip est valeur propre de u avec pour espace propre associé l'espace engendré par

$$(1 + X^2)^{(n-p)/2} (1 + iX)^p \quad \text{soit encore} \quad (1 + iX)^{(n+p)/2} (1 - iX)^{(n-p)/2}$$

On a au final $n + 1$ valeurs propres distinctes et $n + 1$ vecteurs propres associés, donc on les a tous.

Le spectre de u est donné par $\{-ni, (-n+2)i, \dots, (n-2)i, ni\}$ et pour tout entier p tel que ip soit valeur propre, on a

$$E_{ip}(u) = \text{Vect} \left\{ (1 + iX)^{(n+p)/2} (1 - iX)^{(n-p)/2} \right\}$$

19

(**)

X PC 2010

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

- (a) Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
- (b) Montrer que $\det(A + I_n) \geq 1$.
- (c) Montrer que pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det(A + S) \geq \det(S)$.

- (a) Notons $B = iA$. Alors, ${}^t B = i {}^t A = -iA = \overline{B}$. Soit maintenant λ appartenant au spectre de B et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé (donc non nul). Ainsi,

$${}^t \overline{B} X = {}^t \overline{B} (\lambda X) = \lambda \|X\|^2$$

où la norme utilisée est la norme euclidienne classique sur $\mathbb{C}^n$. En transposant, puis en conjuguant toute l'expression, on obtient d'une part

$${}^t (\overline{{}^t \overline{B} X}) = {}^t \overline{{}^t \overline{B} X} = {}^t \overline{B} X = \lambda \|X\|^2$$

et d'autre part

$${}^t (\overline{{}^t \overline{B} X}) = {}^t \overline{\lambda \|X\|^2} = \overline{\lambda} \|X\|^2$$

On en déduit puisque $\|X\| \neq 0$ que $\overline{\lambda} = \lambda$ soit que $\lambda \in \mathbb{R}$. Ceci étant vrai pour tout λ , le spectre de B est réel, et donc

$$\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$$

- (b) D'après ce qui précède, la matrice A admet au plus 0 comme seule valeur propre réelle. Puisque la matrice est réelle, ses valeurs propres complexes non réelles peuvent être regroupées par couple de complexes conjugués ayant même ordre de multiplicité. Par suite, si l'on note

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_p, \overline{\lambda_p}, 0, \dots, 0\}$$

son spectre compté avec multiplicités, il vient

$$\det(A + I_n) = \prod_{k=1}^p (1 + \lambda_k) (1 + \overline{\lambda_k}) = \prod_{k=1}^p |1 + \lambda_k|^2$$

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, puisque λ_k est imaginaire pur pour tout entier k , on a $|1 + \lambda_k|^2 = 1 + |\lambda_k|^2$ et ainsi,

$$\det(A + I_n) = \prod_{k=1}^p (1 + |\lambda_k|^2)$$

Notamment,

$$\det(A + I_n) \geq 1$$

- (c) Puisque S est symétrique définie positive, il existe une matrice R symétrique définie positive telle que $R^2 = S$. En effet, il suffit de poser O orthogonale telle que S soit de la forme tODO avec D diagonale et de poser $R = {}^tO\Delta O$ où Δ est la matrice diagonale d'éléments diagonaux $(\sqrt{D_{1,1}}, \dots, \sqrt{D_{n,n}})$. Avec cette matrice R , on a

$$\det(A + S) = \det(A + R^2) = \det[R(R^{-1}AR^{-1} + I_n)R]$$

et donc $\det(A + S) = (\det R)^2 \det(R^{-1}AR^{-1} + I_n) = \det S \det(R^{-1}AR^{-1} + I_n)$

Remarquons maintenant que R étant symétrique, R^{-1} l'est également et $R^{-1}AR^{-1}$ est antisymétrique. On peut donc lui appliquer le résultat du (b) et il vient que $\det(R^{-1}AR^{-1} + I_n) \geq 1$. D'après l'égalité précédente, on peut donc conclure

$$\det(A + S) \geq \det S$$

20

(**)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr } AU \leq \text{Tr } A$ avec égalité si et seulement si $AU = A$.

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée. Soit donc $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = {}^tOAO$ soit diagonale. Ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de A donc des quantités positives. Alors pour toute matrice $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr } (AU) = \text{Tr } (OD{}^tOU) = \text{Tr } (DV) \quad \text{avec} \quad V = {}^tOUO$$

La matrice D étant diagonale, il vient $\text{Tr } (DV) = \sum_{i=1}^n D_{i,i} V_{i,i}$

Remarquons maintenant que V est une matrice orthogonale, donc ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{R}^n$. En particulier, $|V_{i,i}| \leq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. La positivité des $(D_{i,i})_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ donne alors la majoration

$$\sum_{i=1}^n D_{i,i} V_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n D_{i,i} = \text{Tr } D = \text{Tr } A$$

Déterminons le cas d'égalité. Avec les mêmes notations, si $\text{Tr } A = \text{Tr } AU$, alors $D_{i,i} V_{i,i} = D_{i,i}$ pour tout entier i . Montrons que $DV = V$, ce qui assurera que $AU = A$. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On distingue deux cas :

- Si $D_{i,i} = 0$, alors les i -ième colonnes $[D]_i$ et $[DV]_i$ des deux matrices DV et D sont nulle.
- Sinon, on a $V_{i,i} = 1$. Mais $[V]_i$ est orthonormé donc c'est nécessairement le i -ème vecteur E_i de la base canonique de $\mathcal{R}^n$. Dès lors, on a $[D]_i = D_{i,i} E_i = [DV]_i$.

Les matrices DV et D ont les mêmes vecteurs colonnes donc elles sont égales. Il s'ensuit que $AU = A$ lorsque $\text{Tr } AU = \text{Tr } A$. La réciproque est évidente.

$$\text{La trace de } AU \text{ est inférieure ou égale à celle de } A \text{ avec égalité si et seulement si } AU = A.$$

21

(*)

CCP PC 2019

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \cdot A^T \cdot A = I_n$. Montrer que A est diagonalisable puis que $A = I_n$.

Notons $B = A^T A$. Alors, $A \cdot B = I_n$ ce qui prouve que A est inversible d'inverse $A^T A$. Remarquons ensuite que $A^T A$ est symétrique (réelle) puisque

$$(A^T A)^T = (A^T)^T (A)^T = A^T A$$

donc A^{-1} est symétrique. L'inverse d'une matrice symétrique restant symétrique, la matrice $(A^{-1})^{-1}$, c'est-à-dire A , est symétrique. Le théorème spectral prouve donc que

$$\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable en base orthonormée.}$$

Considérons donc $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = O^T \Delta O$ où Δ est une matrice diagonale dont on note $d_1, \dots, d_n$ les éléments diagonaux. La matrice A étant symétrique,

$$A \cdot A^T \cdot A = A^3 = O^T \Delta^3 O = I_n \quad \text{d'où} \quad \Delta^3 = I_n$$

ce qui revient à $d_i^3 = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. L'équation $x^3 = 1$ n'admet que 1 comme solution réelle donc $d_i = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ce qui prouve que $\Delta = I_n$ et finalement que

$$\boxed{A = I_n}$$