

## I. FONCTIONS HARMONIQUES : QUELQUES PROPRIÉTÉS

**1** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{H}(U)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Utilisons la caractérisation des sous-espaces vectoriels :

- $0 \in \mathcal{H}(U)$  car  $(x \mapsto 0) \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  et  $\Delta(x \mapsto 0) = 0$ .
- Si on pose  $h = f + \lambda g$ ,  $h \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  et par linéarité de la dérivation,

$$\Delta h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = \Delta f + \lambda \Delta g = 0$$

On en déduit que  $h \in \mathcal{H}(U)$ .

Ainsi,

$\mathcal{H}(U)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ .

**2** Montrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(k) : \quad \ll \forall (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^k \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \in \mathcal{H}(U) \gg$$

est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

- $\mathcal{P}(0)$  est vraie car  $f \in \mathcal{H}(U)$ .
- $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$  : soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie. Choisissons  $k+1$  indices  $i_1, i_2, \dots, i_{k+1}$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  et notons

$$g = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{k+1}}}$$

La propriété  $\mathcal{P}(k)$  assure que  $g \in \mathcal{H}(U)$ . On a alors

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial g}{\partial x_{i_1}}$$

Comme  $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ , ses dérivées  $(k+1)$ -ième sont de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $g$  vérifie donc les hypothèses du théorème de Schwarz généralisé. On peut ainsi calculer

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial g}{\partial x_{i_1}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right) \quad (\text{théorème de Schwarz}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right) \quad (\text{linéarité de } \frac{\partial}{\partial x_i})$$

$$\Delta \left( \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} (0) = 0 \quad (g \in \mathcal{H}(U))$$

On en déduit que  $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}} \in \mathcal{H}(U)$ .  $\mathcal{P}(k+1)$  est donc vraie.

- Conclusion :

Toute dérivée partielle à tout ordre de  $f \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  appartient à  $\mathcal{H}(U)$ .

**3** Soit  $f \in \mathcal{H}(U)$  telle que  $f^2 \in \mathcal{H}(U)$ , alors

$$\Delta(f^2) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 0$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , 
$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( 2f \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

d'où 
$$0 = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + 2f \Delta(f) = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$$

Comme tous les termes de la somme sont positifs, ils sont tous nuls. Ainsi, le gradient de  $f$  est nul sur le connexe par arc  $U$  d'où  $f$  est constante. Réciproquement, toutes les fonctions constantes sont harmoniques de carré harmonique car constant.

L'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathcal{H}(U)$  telles que  $f^2 \in \mathcal{H}(U)$  sont les fonctions constantes.

Même si la phase de vérification finale de la réciproque est souvent rapide, il ne faut pas oublier de l'effectuer. Après avoir montré que les seuls candidats possibles sont les fonctions constantes, il faut bien vérifier qu'elles sont harmoniques de carré harmonique.

**4** Considérons

$$f: \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto x_1 \end{cases}$$

On constate que  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  et que  $\Delta f = 0$ .  $f$  est donc harmonique, mais non constante. En effet,  $U$  est ouvert et contient donc une boule ouverte de centre  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  et de rayon  $2r > 0$ . Si on note  $e_1$  le premier vecteur de la base canonique,  $a + re_1$  et  $a - re_1$  sont dans  $U$ . Mais  $f(a + re_1) = a_1 + r$  et  $f(a - re_1) = a_1 - r$  ce qui montre que  $f$  n'est pas constante. Par contraposée du résultat de la question 3, le produit de deux fonctions harmoniques n'est alors pas toujours harmonique car  $f^2$  n'est pas harmonique.

La formulation de l'énoncé suggère que la réponse à la deuxième partie de la question va être non. Pour montrer qu'une proposition est fausse, le plus simple est de trouver un contre-exemple. On aurait aussi pu penser aux formes linéaires ou aux polynômes de degré inférieur ou égal à 1, qui sont aussi harmoniques.

## II. EXEMPLES DE FONCTIONS HARMONIQUES

**5** Comme  $f \in \mathcal{H}(U)$ ,  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . Par ailleurs,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = u''(x)v(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = u(x)v''(y)$$

On en déduit que 
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0 \tag{1}$$

Puisque  $u$  et  $v$  sont non identiquement nulles, il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$  tels que  $u(x_0) \neq 0$  et  $v(y_0) \neq 0$ . En utilisant (1) avec  $y = y_0$ , puis avec  $x = x_0$ , on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u''(x) + \lambda_1 u(x) = 0 \quad \text{où } \lambda_1 = \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$$

$$\text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad v''(y) + \lambda_2 v(y) = 0 \quad \text{où } \lambda_2 = \frac{u''(x_0)}{u(x_0)}$$

En réutilisant (1) en  $x = x_0$  et  $y = y_0$ , on obtient

$$u''(x_0)v(y_0) + u(x_0)v''(y_0) = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda_1 = -\lambda_2$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } u'' + \lambda u = 0 \text{ et } v'' - \lambda v = 0.}$$

**6** Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , les solutions de l'équation du second degré  $z'' + \alpha z = 0$  sont :

- si  $\alpha < 0$ ,  $z(t) = A \operatorname{sh}(\sqrt{-\alpha}t) + B \operatorname{ch}(\sqrt{-\alpha}t)$  où  $A, B \in \mathbb{R}$ ,
- si  $\alpha = 0$ ,  $z(t) = A + Bt$  où  $A, B \in \mathbb{R}$ ,
- si  $\alpha > 0$ ,  $z(t) = A \cos(\sqrt{\alpha}t) + B \sin(\sqrt{\alpha}t)$  où  $A, B \in \mathbb{R}$ .

Dans le cas  $\alpha > 0$ , on peut également choisir  $\exp(\sqrt{\alpha}t)$  et  $\exp(-\sqrt{\alpha}t)$  pour exprimer la solution. De même, si  $\alpha < 0$ , on peut choisir d'utiliser  $\cos(\sqrt{\alpha}t + \phi)$ , ou bien  $\exp(\sqrt{-\alpha}t)$  et  $\exp(-\sqrt{-\alpha}t)$ .

Il existe  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  tels que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, y)$  vaut

$$\begin{cases} (A \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x) + B \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x)) (C \cos(\sqrt{-\lambda}y) + D \sin(\sqrt{-\lambda}y)) & \text{si } \lambda < 0 \\ (A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x)) (C \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}y) + D \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}y)) & \text{si } \lambda > 0 \\ (A + Bx)(C + Dy) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

### III. PRINCIPE DU MAXIMUM FAIBLE

**21** Constatons que  $\overline{U}$  est un fermé car c'est l'adhérence de  $U$ . Montrons que  $\overline{U}$  est également borné. Soit  $u \in \overline{U}$ , il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $U$  qui tend vers  $u$ . Comme  $U$  est borné, il existe  $M > 0$  tel que  $\|u_n\| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Comme la norme est une application continue, par passage à la limite, on obtient  $\|u\| \leq M$ . Ainsi,  $\overline{U}$  est borné. Comme  $U \in \mathbb{R}^n$  de dimension finie,  $\overline{U}$  est un compact. De plus,  $f$  est continue donc, par le théorème des bornes atteintes,  $f$  admet un maximum qu'elle atteint.

$$\boxed{\text{Il existe } x_0 \in \overline{U} \text{ tel que } f(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} f(x).}$$

**22** Supposons par l'absurde que  $x_0 \in U$ . Comme  $\Delta f(x) > 0$  pour tout  $x \in U$ , on a

$$\Delta f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$$

Il existe donc  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$ . Notons  $e_i$  le  $i$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et posons

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x_0 + te_i) \end{cases}$$

Remarquons que  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0 + te_i) \quad \text{d'où} \quad \varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$$

Par continuité de  $\varphi''$ , il existe donc un voisinage  $V = ]-\varepsilon; \varepsilon[$  avec  $\varepsilon > 0$  tel que si  $t \in V$ ,  $\varphi''(t) > 0$ . Sur ce voisinage,  $\varphi'$  est donc strictement croissante. Comme  $\varphi$  admet un maximum en 0, puisque  $x_0$  est un maximum de  $f$ , on a  $\varphi'(0) = 0$ . On en déduit que  $\varphi'$  est strictement positive sur  $]0; \varepsilon[$ , strictement négative sur  $] -\varepsilon; 0[$ , ce qu'on résume dans le tableau de variations

|            |                         |              |                        |
|------------|-------------------------|--------------|------------------------|
|            | $-\varepsilon$          | $0$          | $\varepsilon$          |
| $\varphi'$ | $-$                     | $0$          | $+$                    |
| $\varphi$  | $\varphi(-\varepsilon)$ | $\varphi(0)$ | $\varphi(\varepsilon)$ |

On a alors  $\varphi(\varepsilon) > \varphi(0)$ , ce qui contredit la maximalité de  $\varphi(0)$ . On a donc montré que

$$x_0 \in \partial U$$

Puisque le maximum de  $f$  n'est pas atteint sur  $U$ , pour tout  $x \in U$  on a  $f(x) < f(x_0)$ . De plus, comme  $x_0 \in \partial U$ , on obtient  $f(x_0) = \sup_{y \in \overline{U}} f(y) = \sup_{y \in \partial U} f(y)$ .

$$\forall x \in U \quad f(x) < \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

**23** La norme au carré est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(\overline{U}, \mathbb{R})$ , et  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  donc

$$g_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\overline{U}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$$

On a  $\Delta f = 0$  car  $f$  est harmonique sur  $U$ . Appelons  $N$  la fonction qui renvoie la norme au carré d'un élément, c'est-à-dire pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $N(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ . Si  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\partial^2 N / \partial x_i^2 = 2$  donc  $\Delta N = 2n > 0$ . Ainsi,

$$\Delta g_\varepsilon = \Delta f + \varepsilon \Delta N = 2n\varepsilon > 0$$

**24** Appliquons la question 22 à  $g_\varepsilon$ . En utilisant la question 23,  $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  et  $\Delta g_\varepsilon(x) > 0$  pour tout  $x \in U$ , donc  $g_\varepsilon$  vérifie bien les hypothèses nécessaires. Ainsi, pour tout  $x \in U$ ,

$$g_\varepsilon(x) < \sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y)$$

Or,  $g_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x)$  pour tout  $x \in U$ . On a montré à la question 21 que  $\overline{U}$  était borné par  $M$  donc pour tout  $y \in \partial U$ ,  $N(y) \leq M^2$ . En combinant cela avec le fait que pour tout  $x \in \partial U$ ,  $f(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y)$ , on obtient

$$\forall x \in \partial U \quad g_\varepsilon(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y) + 4\varepsilon M^2$$

En faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \partial U \quad f(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y)}$$

**25** Posons  $g = f_1 - f_2$ . Comme  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ ,  $g$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$  et  $\Delta g = \Delta f_1 - \Delta f_2 = 0$ . La fonction  $g$  est donc harmonique sur  $U$ . Grâce à la question 24, pour tout  $x \in U$ ,  $g(x) \leq \sup_{y \in \partial U} g(y)$ . Or, si  $y \in \partial U$ ,

$$g(y) = f_1(y) - f_2(y) = 0$$

donc

$$\forall x \in U \quad g(x) \leq 0$$

De même, si on pose  $h = -g$ ,  $h$  est harmonique sur  $U$  et par la question 24, pour tout  $x \in U$ ,  $h(x) \leq \sup_{y \in \partial U} h(y)$ . Mais si  $y \in \partial U$ ,  $h(y) = -g(y) = 0$ .

On obtient

$$\forall x \in U \quad h(x) \leq 0$$

En combinant les deux inégalités, pour tout  $x \in U$ ,  $0 \leq f_1(x) - f_2(x) \leq 0$  donc  $f_1(x) = f_2(x)$ . On a donc bien

$$\boxed{\forall x \in U \quad f_1(x) = f_2(x)}$$