1 ——— (**) ———

Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R}), \quad f(0)=0\right\}$. Pour tout $f \in E$, on définit

$$N_1(f) = ||f+f'||_\infty \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

(a). Vérifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que N_1 et N_2 sont des normes sur E.

(b). Déterminer deux réels α et β strictement positifs tels que $\alpha\, N_1 \leq N_2 \leq \beta\, N_1$. (comparer $||f||_\infty$ et $||f'||_\infty$ puis $||f'||_\infty$ et $||g'||_\infty$ avec $g : t \longmapsto f(t)e^t$). Que peut-on en déduire ?

(a). Il est clair que E est un espace vectoriel en tant que noyau de la forme linéaire $f \longmapsto f(0)$ définie sur $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$. De plus, N_1 et N_2 sont parfaitement définies sur E en tant que borne supérieures de fonctions continues sur le segment $[0;1]$.

Le fait que $||\cdot||_\infty$ soit une norme et la linéarité de la dérivation assure la positive homogénéité et l'inégalité triangulaire pour N_1 et N_2. Reste la propriété de séparation :

- Si f est telle que $N_1(f)=0$, alors $f+f'=0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda e^x$ pour tout $x \in [0;1]$. L'hypothèse $f(0)=0$ prouve que f est donc nulle.
- Si $N_2(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty = 0$, alors puisque les deux termes sont positifs, on a notamment $||f||_\infty = 0$ donc $f=0$.

$$\boxed{N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont des normes sur } E.}$$

(b). Il est clair que $N_1 \leq N_2$. Soit maintenant $f \in E$. Dans un premier temps, par inégalité des accroissements finis appliqués entre 0 et $x \in [0;1]$, il vient

$$|f(x)| = |f(x)-f(0)| \leq x\,||f'||_\infty \leq ||f'||_\infty$$

d'où en passant au sup $\qquad ||f||_\infty \leq ||f'||_\infty \qquad$ puis $\qquad N_2(f) \leq 2\,||f'||_\infty$

Notons ensuite $g : t \longmapsto f(t)e^t$. Alors g est dérivable et

$$\forall t \in [0;1], \qquad g'(t) = (f(t)+f'(t))e^t \qquad \text{d'où} \qquad ||g'||_\infty \leq eN_1(f)$$

On a également $f(t) = g(t)e^{-t}$ donc de la même manière, il vient

$$||f'||_\infty \leq ||g'-g||_\infty \leq N_2(g) \leq 2\,||g'||_\infty \leq 2eN_1(f)$$

Finalement $\qquad \boxed{N_2(f) \leq 2\,||f'||_\infty \leq 4eN_1(f)}$

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et g un élément de E. L'encadrement précédent montre que

$$N_1(f_n-g) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad N_2(f_n-g) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par suite, $\qquad \boxed{\text{Les normes } N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont équivalentes.}}$

2 ——— (**) ——— **X PC 2012**

Soit E l'ensemble des suites bornées dont le premier élément est nul. On le muni de la norme infinie et on définit de plus

$$\left|\left|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right|\right|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1}-u_n|$$

(a). Montrer que $||\ ||_1$ est un norme sur E .

(b). Comparer $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_1$. Les normes sont-elles équivalentes ?

(a). Il est clair que E un espace vectoriel en tant que noyau de l'application linéaire $u \longmapsto u_0$ définie sur $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Par ailleurs, $||\cdot||_1$ est bien définie car tout élément u de E est bornée donc il en est de même de $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Il est clair que $||\cdot||_1$ vérifie la propriété de positive homogénéité. Soit maintenant $u, v \in E$. Pour tout entier n, on a

$$|(u+v)_{n+1} - (u+v)_n| = |u_{n+1}+v_{n+1}-u_n-v_n| \leq |u_{n+1}-u_n| + |v_{n+1}-v_n| \leq ||u||_1 + ||v||_1$$

En passant à la borne supérieure, on obtient la propriété de l'inégalité triangulaire. Enfin,

$$||u||_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}-u_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 = 0$$

Tout ceci prouve que $\qquad \boxed{\text{L'application } ||\cdot||_1 \text{ est une norme sur } E.}$

(b). Soit $u \in E$. Pour tout entier n, on a $\quad |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\,||u||_\infty$

En passant à la borne supérieure, il vient $\quad ||u||_1 \leq 2\,||u||_\infty$

ce qui prouve que $\quad \boxed{\text{La norme } ||\cdot||_\infty \text{ domine la } ||\cdot||_1.}$

On définit la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (u_p)_n = \begin{cases} n/p & \text{si } n \leq p \\ 1 & \text{si } n > p \end{cases}$$

Ainsi définie, on a $||u_p||_1 = 1/p$ et $||u_p||_\infty = 1$ de sorte que la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite nulle pour $||\cdot||_1$ mais pas pour $||\cdot||_\infty$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Les normes } ||\cdot||_1 \text{ et } ||\cdot||_\infty \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

3 ——— (∗∗∗) ———

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0;1]$, on note

$$N_a : f \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|f(a_k)|}{2^k}$$

(a) Montrer que l'application N_a est une norme sur E si et seulement si $\overline{\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}} = [0;1]$.

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $[0;1]$ telle que $\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\} \neq \{b_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. Justifier que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

(a) Il est clair que E est un espace vectoriel. Si f est un élément de E, alors f est continue sur un segment donc bornée. On en déduit que

$$\frac{|f(a_k)|}{2^k} = O\left(\frac{1}{2^k}\right)$$

ce qui prouve que la série est convergente par comparaison aux séries géométriques. L'application N_a est donc bien définie.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et toutes fonctions $f, g \in E$, on a

$$|\lambda f(a_k)| = |\lambda|\,|f(a_k)| \qquad \text{et} \qquad |(f+g)(a_k)| = |f(a_k) + g(a_k)| \leq |f(a_k)| + |g(a_k)|$$

En divisant ces inégalités par 2^k puis en sommant de 0 à l'infini, on obtient immédiatement l'inégalité triangulaire et la positive homogénéité pour N_a. Le fait que N_a soit une norme dépend donc uniquement du fait qu'elle vérifie ou non la propriété de séparation.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit f telle que $N_a(f) = 0$. Alors, puisque $N_a(f)$ est une somme de quantités positives, il vient que f s'annule sur la partie dense $A = \{a_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ de $[0;1]$. Si x est un réel quelconque de cet intervalle, il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A de limite x. Mais puisque $f(\alpha_k) = 0$ pour tout k d'après ce qui précède, il vient $f(x) = 0$ par passage à la limite et continuité de f. Le réel x étant arbitraire, f est nulle et N_a vérifie la séparation donc est une norme sur E.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Raisonnons par contraposée en supposant que $\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ ne soit pas une partie dense. Il existe alors un segment I que l'on peut noter $[a;b]$ inclus dans $[0;1]$ et non réduit à un point qui ne contient aucune valeur de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons alors

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)(x-b) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f s'annule en tout point n'appartenant pas à $[a;b]$ donc sur $\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. Ainsi, $N_a(f) = 0$ bien que f ne soit pas la fonction nulle, et N_a n'est donc pas une norme.

$$\boxed{N_a \text{ est une norme si et seulement si } \{a_n,\ n\in\mathbb{N}\} \text{ est dense dans } [0;1].}$$

(b) On suppose maintenant que les ensembles $A = \{a_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ et $B = \{b_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ sont distincts. On peut alors supposer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \notin B$. Notons alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies de la manière suivante :

- $f_n(a_p) = 1$ et f_n est nulle en dehors de $]a_p - 1/n; a_p + 1/n[$.
- f_n est affine sur $]a_p - 1/n; a_p[$ et $]a_p; a_p + 1/n[$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Ainsi définie, f_n est à valeurs dans $[0;1]$ et vaut 1 en a_p donc

$$N_a(f_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|f_n(a_k)|}{2^k} \geq \frac{|f_n(a_p)|}{2^p} = \frac{1}{2^p}$$

Cette minoration prouve donc que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 pour la norme N_a. Par ailleurs, pour tout entier N arbitrairement fixé,

$$N_b(f_n) \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{|f_n(b_k)|}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{|f_n(b_k)|}{2^k} + \frac{1}{2^N}$$

Puisque $b_0, \ldots, b_N$ sont tous distincts de a_p, il existe un rang n_0 à partir duquel aucun d'entre eux n'appartient à l'intervalle $[a_p - 1/n; a_p + 1/n]$. Dès lors, f_n s'annule en chacun et la majoration précédente devient

$$\forall n \geq n_0, \qquad N_b(f_n) \leq \frac{1}{2^N}$$

L'entier n_0 dépend de N, mais ce dernier a été pris arbitraire. Si l'on fixe $\epsilon > 0$, on peut trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/2^N < \epsilon$, puis un rang n_0 à partir duquel $N_b(f_n) \leq 1/2^N < \epsilon$. Cela assure que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour N_b. Ainsi,

$$\boxed{\text{Les convergences pour } N_a \text{ et } N_b \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

4 ———— (∗∗) ————

On admet que $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que $\overline{\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a). Donner un exemple de matrices A et B telles que AB soit nulle et BA non nulle.

(b). En déduire qu'il n'existe pas de norme $||\cdot||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\left|\left|P^{-1}MP\right|\right| = ||M||$ pour toute matrice M et toute matrice inversible P.

(a). Il suffit de prendre $A = E_{1,1}$ et $B = E_{2,1}$ où $(E_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]^2}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$E_{1,1} \cdot E_{2,1} = 0 \qquad \text{et} \qquad E_{2,1} \cdot E_{1,1} = E_{2,1} \neq 0$$

(b). Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'une telle norme. Notons A et B les deux matrices de la question précédente. Puisque $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une suite de matrices inversibles $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergente vers B. Alors, pour tout entier p,

$$A\,B_p = {B_p}^{-1}\,(B_p\,A)\,B_p \qquad \text{et donc} \qquad ||A\,B_p|| = ||B_p\,A||$$

Par continuité de $M \longmapsto AM$, $M \longmapsto MA$ (qui sont linéaires) et continuité de la norme, on peut passer à la limite en faisant tendre p vers $+\infty$ et il vient

$$||AB|| = ||BA||$$

Sachant que AB est nulle mais pas BA, cela contredit la propriété de séparation. Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il n'existe pas de norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ vérifiant} \\ \quad \forall (M,P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K}), \qquad ||M|| = \left|\left|P^{-1}MP\right|\right|\end{array}}$$

5 ———— (∗∗) ————

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-|t|}\,|f(t)| \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} (1 - e^{-|t|})\,|f(t)|$$

(a). Montrer que N_1 et N_2 sont des normes

(b). Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Pour simplifier, on note $h_1 : t \longmapsto e^{-|t|}$ et $h_2 : t \longmapsto (1 - e^{-|t|})$. Il est clair que N_1 et N_2 sont bien définies car si f est bornée, il en est de même de $f\,h_1$ et $f\,h_2$. Justifions qu'il s'agit de normes. On introduit pour cela la norme infinie $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $f \in E$ et tout scalaire λ, on a

$$N_1(\lambda f) = ||\lambda\, f\, h_1||_\infty = |\lambda|\; ||f\, h_1||_\infty = |\lambda|\, N_1(f)$$

  La preuve est identique pour N_2.

- Pour tous $f, g \in E$, on a

$$N_1(f+g) = ||(f+g)\,h_1||_\infty \leq ||f\,h_1||_\infty + ||g\,h_1||_\infty = N_1(f) + N_1(g)$$

A nouveau, la preuve est identique pour N_2.

- Si f est tel que $N_1(f) = 0$, alors $||f\,h_1||_\infty = 0$ et donc $f\,h_1 = 0$. Mais comme h_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, c'est que f est nulle.

  Pour la norme N_2, on ne peut pas conclure directement car h_2 s'annule en 0. On a seulement f nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais la continuité de f permet de conclure à la nullité de f.

Finalement $\boxed{N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont des normes sur } E.}$

Introduisons les deux suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier $n \geq 1$,

- f_n est nulle en dehors de $I_n = [-1/n; 1/n]$, affine sur $[-1/n; 0]$ et $[0; 1/n]$, et prend la valeur 0 en 1. En particulier, elle est à valeurs dans $[0; 1]$ donc bornée.
- f_n est nulle en dehors de $J_n = [n - 1/n; n + 1/n]$, affine sur $[n - 1/n; n]$ et $[n; n + 1/n]$, et prend la valeur 0 en n. En particulier, elle est également à valeurs dans $[0; 1]$ donc bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut remarquer que par construction,

$$N_1(f_n) = ||f_n\,h_1||_\infty \geq (f_n h_1)(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad N_2(g_n) = ||g_n\,h_2||_\infty \geq (g_n h_2)(n) = 1 - e^{-n}$$

Par ailleurs, f_n étant nulle en dehors de I_n et g_n nulle en dehors de J_n,

$$N_2(f_n) = ||f_n\,h_2||_{\infty,I_n} \leq ||f_n||_\infty\,||h_2||_{\infty,I_n} = 1 - e^{-1/n} \qquad \text{et} \qquad N_2(g_n) = ||g_n\,h_1||_{\infty,J_n} \leq ||g_n||_\infty\,||h_1||_{\infty,I_n} = e^{-n+1/n}$$

Il résulte de ces inégalités que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour N_2 (resp. N_1) mais pour pour N_1 (resp. N_2). Par conséquent,

$$\boxed{\text{La convergence pour } N_1 \text{ (resp. } N_2\text{) n'implique pas la convergence pour } N_2 \text{ (resp. } N_1\text{).}}$$

6 ——— (∗) ———

Si A est une partie non vide et bornée d'un espace vectoriel normé E, on appelle diamètre de A et on note $\delta(A)$ le réel

$$\delta(A) = \sup_{x,x'\in A} d(x, x')$$

Montrer que si A est bornée, alors A° et $\overline{A}$ le sont également et que

$$\delta(A^\circ) \leq \delta(A) = \delta(\overline{A})$$

sous réserve que A° est non vide. L'inégalité peut-elle être stricte ?

Le caractère borné de A° est immédiat dès lors que A° est inclus dans A. Montrons que $\overline{A}$ l'est également. Puisque A est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $||x|| \leq M$ pour tout $x \in A$. Soit maintenant $y \in \overline{A}$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente de limite y. Alors, par continuité de la norme,

$$||x_n|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} ||y|| \qquad \text{d'où} \qquad ||y|| \leq M$$

par passage à la limite sur l'inégalité $||x_n|| \leq M$. Ainsi, A est également bornée.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est bornée, alors } A^\circ \text{ et } \overline{A} \text{ le sont également.}}$$

L'encadrement $\delta(A^\circ) \leq \delta(A) \leq \delta(\overline{A})$ découle à nouveau des inclusions $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$. Il reste donc à démontrer que $\delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$. Considérons donc $x, x' \in \overline{A}$ et fixons $r > 0$. Par définition,

$$B_{x,r} \cap A \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad B_{x,r} \cap A \neq \emptyset$$

Soit donc a et a' deux éléments de A tels que $||x - a|| < r$ et $||x' - a'|| < r$. Par suite,

$$\begin{aligned} ||x - x'|| &= ||x - a + a - a' + a' - x'|| \\ &\leq ||x - a|| + ||a - a'|| + ||a' - x'|| \\ ||x - x'|| &\leq \delta(A) + 2r \end{aligned}$$

L'inégalité étant valable pour tout $x, x' \in \overline{A}$, on peut passer à la borne supérieure et ainsi

$$\delta(\overline{A}) \leq \delta(A) + 2r$$

Le réel r ayant été pris arbitraire, on obtient l'inégalité souhaitée en faisant tendre r vers 0. Finalement,

$$\boxed{\delta(A^\circ) \leq \delta(A) = \delta(\overline{A})}$$

Pour obtenir une inégalité stricte, il suffit de considérer $A = [0;1] \cup \{2\}$. Alors, $A^\circ =]0;1[$ de diamètre 1 tandis que $\overline{A}$ est de diamètre 2.

7 ——— $(*)$ ———

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (\star)$$

(a). Montrer que f est impaire.

(b). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(kx) = kf(x)$.

(c). Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout rationnel r, on ait $f(r) = \alpha\, r$.

(d). En déduire l'ensemble des fonctions satisfaisant la propriété ci-dessus.

(a). Par hypothèse, $\qquad f(0+0) = f(0) + f(0) \qquad$ d'où $\qquad f(0) = 0$

puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\qquad f(x-x) = f(0) = f(x) + f(-x) \qquad$ d'où $\qquad f(-x) = -f(x)$

Par conséquent $\qquad$ **La fonction f est impaire.**

(b). La preuve est immédiate par récurrence sur k pour $k \in \mathbb{N}^*$. L'imparité de f assure alors le résultat pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall (x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad f(kx) = kf(x)}$$

(c). D'après la question précédente, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$f(1) = f(q/q) = qf(1/q) \qquad \text{d'où} \qquad f(1/q) = f(1)/q$$

Par conséquent, si r est un rationnel quelconque, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$f(p/q) = pf(1/q) = pf(1)/q = f(1)(p/q)$$

soit bien $\qquad \boxed{\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = f(1)\, r}$

(d). Soit f une fonction continue satisfaisant $(\star)$ et x un réel quelconque. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x. Le résultat de la question précédente assure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(r_n) = f(1)\, r_n$$

Puisque $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que f est continue, on peut passer à la limite et obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(1)\, x$$

Le réel x ayant été pris arbitraire, on en déduit que f est une application de la forme $x \longmapsto \alpha, x$, avec $\alpha = f(1)$ un réel quelconque. Réciproquement, toute application de cette forme est clairement continue et vérifie la propriété $(\star)$.

Les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$ sont celles de la forme $x \longmapsto \alpha\, x$ où α est un réel quelconque.

8 ——— $(*)$ ———

Soit K un fermé borné de $\mathbb{C}$ dont tous les éléments sont de norme < 1. Justifier l'existence d'un réel $r \in [0;1[$ tel que tout élément de K soit de norme $\leq r$.

L'application $||\cdot||$ est continue sur le compact K (car une norme est 1-lipschitzienne). Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Notons donc x_0 de norme minimal dans K et $r = ||x_0||$. Alors par hypothèse, $r < 1$ et par définition de x_0, $r < ||x||$ pour tout $x \in K$.

Il existe $r < 1$ tel que tout élément de K est norme $\leq r$.

9 ——— $(*)$ ———

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$ et $f, g \in E$. Montrer que l'ensemble suivant est un ouvert de E :

$$\Omega = \{h \in E, \quad \forall x \in [0;1]\,, \quad f(x) < h(x) < g(x)\}$$

Soit h_0 un élément de Ω. Notons $\qquad \alpha = \inf_{[0;1]}(h_0 - f) \qquad$ et $\qquad \beta = \inf_{[0;1]}(g - h_0)$

Puisque f, g et h_0 sont continues sur le segment $[0;1]$, ces deux bornes sont atteintes et donc strictement positives par définition de Ω. Prenons maintenant $r = \min(\alpha, \beta)$ et vérifions que $B_{h_0,r} \subset E$. Si h est tel que $||h - h_0||_\infty < r$, alors pour tout réel x,

$$h(x) - f(x) = \underbrace{(h(x) - h_0(x))}_{>-r} + \underbrace{(h_0(x) - f(x))}_{\geq \alpha} > 0$$

De même,

$$g(x) - h(x) = \underbrace{(g(x) - h_0(x))}_{>-r} + \underbrace{(h_0(x) - h(x))}_{\geq \beta} > 0$$

Par conséquent, on a bien $f(x) < g(x) < h(x)$ lorsque h appartient à $B(h_0, r)$ d'où $B_{h_0,r} \subset E$. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Omega \text{ est un ouvert de } E.}$$

10 —— $(**)$ ——

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1]\,, \mathbb{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$. On note

$$A = \left\{ f \in E, \qquad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 1 \right\}$$

(a). Montrer que A est un fermé de E.

(b). Montrer que pour tout élément f de A, $||f||_\infty > 1$.

(c). Calculer $d(0, A)$.

(a). Notons φ_0 et φ_1 les formes linéaires définies sur E par

$$\varphi_0 : f \longmapsto f(0) \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 : f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ces applications sont continues lorsque E est muni de la norme $||\cdot||_\infty$ car 1-lipschitziennes. En effet, pour tous $f, g \in E$,

$$|f(0) - g(0)| \leq ||f - g||_\infty \qquad \text{et} \qquad \left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \leq ||f - g||_\infty$$

Dès lors, A est l'intersection de deux images réciproques de deux fermés de $\mathbb{R}_+$, précisément

$$A = {\varphi_0}^{-1}(\{0\}) \cap {\varphi_1}^{-1}([1; +\infty[)$$

Ainsi, $\boxed{A \text{ est un fermé de } E.}$

(b). Soit $f \in A$. On raisonne par l'absurde en supposant $||f||_\infty \leq 1$. Alors

$$1 \leq \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 ||f||_\infty\,\mathrm{d}t = ||f||_\infty \leq 1$$

Il s'ensuit que toutes ces quantités sont égales et notamment,

$$\int_0^1 (||f||_\infty - f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

$||f||_\infty - f$ étant positive et continue, elle est identiquement nulle, ce qui prouve que $f = ||f||_\infty$ et donc $f(0) = ||f||_\infty = 1$ ce qui contredit le fait que $f \in A$. Par suite,

$$\boxed{\text{Pour tout élément } f \text{ de } A,\ ||f||_\infty \geq 1.}$$

(c). D'après le résultat de la question (b), on a $d(0, A) \geq 1$. Pour montrer qu'elle est égale à 1, on doit trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $(||f_n||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de limite 1. On choisit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1, par exemple $b_n = 1 + 1/n$ puis on construit alors f_n de la manière suivante :

- f_n est constante égale à b_n sur $[a_n; 1]$.
- $f_n(0) = 0$ et f_n est affine sur $[0; a_n]$.

Le réel a_n est alors choisi de manière à satisfaire la condition $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \geq 1$. La fonction f_n construite, on a

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a_n} \frac{b_n}{a_n}\,t\,\mathrm{d}t + \int_{a_n}^1 b_n\,\mathrm{d}t = b_n\left(1 - \frac{a_n}{2}\right)$$

Il suffit donc de prendre $a_n \leq 2(1 - 1/b_n)$ soit par exemple $a_n = 2/(n+1)$ avec le choix de b_n précédent. Avec ce choix, on a une suite d'éléments de A telle que $||f_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\boxed{d(0, A) = 1}$$

11 ——— $(**)$ ———

Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans lui-même. On pose

$$F = \{x \in [0;1]\,, \quad f(x) = x\}$$

(a). Montrer que F est non vide et fermé.

(b). Réciproquement, on considère une partie A fermée et non vide de $[0;1]$. Déterminer une fonction f continue de $[0;1]$ dans lui-même pour laquelle $F = A$, F étant défini comme ci-dessus.

---

1. Pour montrer que F est fermée, il suffit de constater que c'est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $g : x \longmapsto f(x) - x$. Pour s'assurer qu'il est ouvert, remarquons que l'application g précédente vérifie

$$g(0) = f(0) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = g(1) - 1 \leq 0$$

Le théorème des valeurs intermédiaires prouve alors que g s'annule au moins une fois sur $[0;1]$, ce qui prouve le résultat.

$$\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ est fermé et non vide.}}$$

2. Fixons $a \in A$ arbitraire (son existence est assurée car A est non vide), puis posons

$$\begin{array}{rl} f: & [0;1] \longrightarrow [0;1] \\ & x \longmapsto \begin{cases} x + d(x, A) = & \text{si } x \leq a \\ x - d(x, A) = & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Vérifions que f convient :

- L'application $x \longmapsto d(x, A)$ est continue (car 1-lipschitzienne, preuve classique) donc f est continue sur $[0;a[$ et $]a;1]$ par théorèmes généraux, puis en a car les limites à gauche et à droite en ce point sont égales à a).
- Soit $x \in [0;1]$. Par définition, $f(x) = 0$ si et seulement si $d(x, A) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} d(x, A) = 0 &\iff \forall r > 0,\ \exists y \in A, \quad |x - y| \leq r \\ &\iff \forall r > 0, \quad B_{x,r} \cap A \neq \emptyset \\ d(x, A) = 0 &\iff A \in \overline{A} \end{aligned}$$

  Puisque A est fermé, on en déduit que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x appartient à A. On déduit que $F = A$ pour l'application f.
- Il reste à vérifier que f est bien à valeurs dans $[0;1]$. On distingue deux cas :
  - Si $x \in [0;a]$, alors puisque a appartient à A,

  $$0 \leq x \leq x + d(x, A) \leq x + |x - a| = x + (a - x) = a \leq 1$$

  - Si $x \in [a;1]$, cette fois

  $$1 \geq x \geq x - d(x, A) \geq x - |x - a| = x - (x - a) = a \geq 0$$

  Dans les deux cas, on a bien $f(x) \in [0;1]$.

Finalement, $\boxed{\text{Si } A \text{ est une partie fermé non vide de } [0;1], \text{ il existe une fonction continue de } [0;1] \text{ dans lui-même dont } A \text{ est l'ensemble des points fixes.}}$

12 —— (**) —— **Centrale MP 2012**

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note X l'ensemble des matrices semblables à A. Montrer que X est borné si et seulement si A est une matrice d'homothétie.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$. Notons que si A est une matrice d'homothétie, alors clairement X est réduit à $\{A\}$, donc est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etudions la réciproque.
Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'ensemble X des matrices semblables à A soit borné. Considérons alors $\rho > 0$ et notons D la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \rho^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R}) \qquad \text{d'inverse} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \rho^{-(n-1)} \end{pmatrix}$$

Un calcul matriciel élémentaire montre que pour tous $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$,

$$(D^{-1}AD)_{i,j} = \rho^{j-i} \cdot A_{i,j}$$

En particulier, si $A_{i,j} \neq 0$ et $i > j$ $\qquad \left|(D^{-1}AD)_{i,j}\right| \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} +\infty$

et si $A_{i,j} \neq 0$ et $i < j$ $\qquad \left|(D^{-1}AD)_{i,j}\right| \xrightarrow[\rho \to 0]{} +\infty$

Puisque D est semblable à A, cela contredit le caractère borné de X, sauf si $A_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j \in [\![1;n]\!]$. La matrice A est donc nécessairement diagonale. Mais comme le raisonnement précédent peut s'appliquer à tout élément de X, on en déduit que tout élément de X est également une matrice diagonale.
Fixons maintenant $i \neq j$ arbitraires dans $[\![1;n]\!]$ et notons P la matrice de dilatation $I_n + E_{i,j}$, inversible d'inverse $I_n - E_{i,j}$. Un nouveau calcul matriciel élémentaire montre que

$$(P^{-1}AP)_{i,j} = A_{i,i} - A_{j,j}$$

Puisque cette matrice appartient à X, elle est donc diagonale, ce qui impose l'égalité $A_{i,i} = A_{j,j}$. Les indices i et j ayant été pris arbitraires, A est une matrice d'homothétie.

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices semblables à } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est borné si et seulement } A \text{ est une matrice d'homothétie.}}$$

13 —— (*) ——

Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 et $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et non constante.

(a). Montrer que f est bornée sur $\mathbb{U}$ et qu'elle atteint sa borne supérieure M et sa borne inférieure m.

(b). Justifier que f prend au moins deux fois tout valeur $y \in \,]m;M[$.

(a). L'ensemble $\mathbb{U}$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$ et fermé (car image réciproque de $\{1\}$ par le module qui est une application continue) donc compacte. On en déduit aussitôt que

$$\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{U} \text{ et elle atteint ses bornes supérieures et inférieures.}}$$

(b). Notons α et β deux réels tels que $m = f(e^{i\alpha})$ et $M = f(e^{i\beta})$. Par 2π-périodicité de $t \longmapsto e^{it}$, on peut alors supposer sans perdre de généralité que $\beta \in [\alpha; \alpha + 2\pi]$. On a même $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$ car f n'est pas constante donc $m \neq M$. Notons alors

$$\varphi : \begin{array}{rcl} [\alpha;\alpha+2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & f(e^{i\theta}) \end{array}$$

Soit $\lambda \in \,]m;M[$. La fonction φ étant continue par composition, on peut s'appliquer le théorème des valeurs intérmédiaires entre α et β, puis entre β et $\alpha + 2\pi$ pour trouver deux réels θ_1 et θ_2 appartenant respectivement à $]\alpha;\beta[$ et $]\beta;\alpha+2\pi[$ tel que $\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2)$. Les complexes $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ sont alors deux antécédents distincts de λ par f. Par suite,

$$\boxed{f \text{ prend au moins deux fois toute valeur } y \in \,]m;M[.}$$

14 —— (*) ——

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \longmapsto F$ une application continue et surjective, et A une partie de E. On suppose que $\overline{A} = E$. Montrer que $\overline{f(A)} = F$.

Soit $y \in F$. Montrons que $y \in \overline{A}$.

- Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$;
- Puisque A est dense dans E, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x ;
- Puisque f est continue, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, c'est-à-dire y.

Il suffit donc de prendre $b_n = f(x_n)$ pour tout n pour obtenir une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de $f(A)$ qui converge vers y. Puisque y a été choisi quelconque,

$$\boxed{\overline{f(A)} = F}$$

15 — $(*)$

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une application continue. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

(i) l'image réciproque de tout fermé borné est un fermé borné ;

(ii) la fonction $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$.

On procède par double implication.

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Alors, $[-M; M]$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ donc $f^{-1}([-M; M])$ également par (**i**). Soit donc $R \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$f^{-1}([-M; M]) \subset B_{0,R} = [-R; R]$$

En particulier, cela implique que pour tout réel x,

$$|x| > R \quad \Longrightarrow \quad x \notin f^{-1}([-M; M]) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \notin [-M; M] \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| > M$$

L'existence de R étant obtenue avec M arbitraire dans $\mathbb{R}_+$, cela signifie bien que $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Soit F un fermé borné de $\mathbb{R}$. Puisque F est fermé et que f est continue, alors $f^{-1}(F)$ est un fermé. Montrons qu'il est aussi borné. Par hypothèse, il est borné donc il existe $R > 0$ tel que $F \subset [-R; R]$. Mais d'après (**ii**),

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| > M \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| > R$$

En d'autres termes, $f^{-1}([-R; R])$ est inclus dans $[-M; M]$, ce qui prouve son caractère borné.

$$\boxed{\text{Les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes.}}$$

16 — $(*)$

Soit K une partie compacte (c'est-à-dire fermée et bornée) d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que f est une application de K dans K faiblement contractante

$$\forall x \neq y \in K, \qquad ||f(x) - f(y)|| < ||x - y|| \tag{$\star$}$$

Montrer que f a un unique point fixe.

Si x_1 et x_2 sont deux points fixes de f, alors d'après $(\star)$,

$$||x_1 - x_2|| = ||f(x_1) - f(x_2)|| < ||x_1 - x_2||$$

ce qui est absurde. f admet donc au plus un point fixe. Reste à justifier son existence. Notons

$$\varphi : \begin{array}{rcl} K & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & ||f(x) - x|| \end{array}$$

Cette application est continue car 2-lipschitzienne. En effet, pour tous x, y dans $\mathbb{K}$

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= \big|||f(x) - x|| - ||f(y) - y||\big| \\ &\leq \big|\big|\big(f(x) - x\big) - \big(f(y) - y\big)\big|\big| \\ &\leq ||f(x) - f(y)|| + ||x - y|| \\ |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq 2\,||x - y|| \end{aligned}$$

Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur K, en particulier sa borne inférieure. Soit donc x_0 tel que $\varphi(x_0)$ soit minimal. Si x_0 et $f(x_0)$ sont distincts, alors d'après $(\star)$

$$||f(x_0) - f(f(x_0))|| < ||f(x_0) - x_0|| \qquad \text{soit} \qquad \varphi(f(x_0) < \varphi(x_0)$$

ce qui contredit la minimalité de $\varphi(x_0)$. Par conséquent, $x_0 = f(x_0)$ ce qui prouve que

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ admet un unique point fixe sur } K.}$$

17 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un élément de $\mathcal{L}(E)$. On suppose que $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ et on pose $g = \lim_{k\to+\infty} f^k$. Montrer que g est la projection sur $\operatorname{Ker}(f - I_d)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - I_d)$.

Puisque E est de dimension finie, il en est de même de $\mathcal{L}(E)$. La composition est alors bilinéaire donc continue. Notons g la limite de $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Alors,

$$f^{2k} = f^k \circ f^k \qquad \text{et} \qquad f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$$

Par passage à la limite, il vient $\qquad g^2 = g \qquad \text{et} \qquad g \circ f = f \circ g = g$

Cette égalité prouve que g est un projecteur, qui commute avec f. De plus, $g \circ (f - I_d) = 0$ et $(f - I_d) \circ g = 0$, ce qui prouve les inclusions

$$\operatorname{Im}(f - I_d) \subset \operatorname{Ker} g \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker}(f - I_d)$$

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(f - I_d)$. Alors $f(x) = x$ puis $f^k(x) = x$ par récurrence immédiate et enfin $g(x) = x$ par passage à la limite (ce qui utilise la continuité par linéarité de $h \longmapsto h(x)$). Cela justifie que $x \in \operatorname{Im} g$. On donc l'égalité $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(f - I_d)$, et l'autre s'en déduit par inclusion et un argument de dimension, via le théorème du rang. Pour conclure,

$$\operatorname{Im}(f - I_d) = \operatorname{Ker} g \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(f - I_d)$$

$$\boxed{g \text{ est le projecteur sur } \operatorname{Ker}(f - I_d) \text{ parallèlement à } \operatorname{Im}(f - I_d).}$$

18 (**) **ENS PC 2001**

(a). Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$. Même chose avec le complémentaire d'une boule fermée.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

(b). Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $F^{-1}(\{c\})$ soit un singleton. Que peut-on dire de c ?

(c). On suppose que il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F^{-1}(\{c\})$ est un fermé borné non vide. Montrer que F admet un extremum.

(d). Les résultats sont-ils conservés pour une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

(a). Graphiquement, une partie U est connexe par arcs si on peut trouver un chemin continu de x vers y dans U pour tous points x et y. Dans les deux cas de l'énoncé, la propriété est évidente. On peut toujours se déplacer d'un point à un autre dans $\mathbb{R}^2$ en évitant un troisième point, ou même une boule centrée en 0 si les deux points sont à l'extérieur de boule : il suffit de contourner la zone à éviter.

D'un point de vue purement analytique, il suffit de poser dans le premier cas :

(a) $\varphi : t \longmapsto t\,x + (1-t)\,y$ si x, y et c ne sont pas aligné dans $\mathbb{R}^2$; le trajet parcouru est alors le segment $[x; y]$ qui ne contient pas c ;

(b) $\varphi : t \longmapsto (x+y)/2 + \cos(\pi t)(x-y)/2 + \sin(\pi t)h$ où h est un vecteur orthogonal à $x+y$ s'ils sont alignés ; le trajet parcouru est alors un arc de cercle de centre le milieu de x et y et passant par x et y (il ne contient aucun point alignés avec x et y et donc pas c).

Dans le second, le plus simple est de passer en affixe complexe, de choisir $\varphi : t \longmapsto r(t)\exp(i\theta(t))$ avec $r : t \longmapsto t\,r_1 + (1-t)\,r_2$ et $\theta : t \longmapsto t\,\theta_1 + (1-t)\,\theta_2$ où x est d'affixe $r_1 \exp(i\theta_1)$ et y d'affixe $r_2 \exp(i\theta_2)$.

(b). Justifions que c est un extremum global de F. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ et $y \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$F(x) < c \qquad \text{et} \qquad F(y) > c$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $F^{-1}(\{c\}) = \{x_0\}$. Soit $\varphi : [0;1]$ dans $\mathbb{R}^2$ continue telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$ quelconque du moment que $x_0 \notin \varphi([0;1])$. L'existence d'un tel φ découle de la première question. Notons $g = F \circ \varphi$. Alors,

$$g(0) = F(x) < c \qquad \text{et} \qquad g(1) = F(y) > c$$

Puisque g est continue, cela implique qu'il existe $t_0 \in [0;1]$ tel que $g(t_0) = c$. Alors $z = \varphi(t_0)$ appartient à $F^{-1}(\{c\})$ et est distinct de x_0 car $x_0 \notin \varphi([0;1])$, ce qui est absurde. Par conséquent, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\quad F(x) \leq c \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,\quad F(x) \geq c$$

En d'autres termes, $\qquad \boxed{\text{Le réel } c \text{ est un extremum global de } F.}$

(c). Notons $K = F^{-1}(\{c\})$. Puisque K est borné, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $K \subset \overline{B}_{0,M}$. Soit alors $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $||a|| > M$. Alors, $a \notin F$ donc $F(a) \neq c$. Supposons par exemple que $F(a) > c$ et montrons que F admet un minimum global.
On sait que $\overline{B}_{0,M}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ donc F est bornée et atteint sa borne inférieure sur cet ensemble. Notons m_0 ce minimum et x_0 un point en lequel il est atteint. Alors, par définition,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad ||x|| \leq M \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq m_0$$

Notons que K est non vide et inclus dans $\overline{B}_{0,M}$ donc il existe $y \in \overline{B}_{0,M}$ tel que $F(y) = c$ et donc $c \geq m_0$.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $||x|| > M$. Grâce à nouveau à la première question, on peut trouver $\varphi : [0;1]$ dans $\mathbb{R}^2$ continue telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = a$ avec $\varphi([0;1]) \cap \overline{B}_{0,M} = \emptyset$ et poser $g = F \circ \varphi$. Par construction, $g(t) \neq c$ pour tout $t \in [0;1]$. Mais puisque $g(1) = F(a) > c$, on a par continuité $g(0) = F(x) > c$ également. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad ||x|| > M \quad \Longrightarrow \quad f(x) > c \geq m_0$$

Par conséquent, F admet bien m_0 pour minimum global. Le cas $F(a) < c$ est similaire et on conclut alors que F admet un maximum global. Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ admet un extremum global.}}$$

(d). La réponse est non comme le montre l'exemple de la fonction $F = \arctan$. Elle est bijective strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2;\pi/2[$ donc pour tout $c \in [-\pi/2;\pi/2]$, $F^{-1}(\{c\})$ est un singleton **donc** un fermé borné, sans que c soit un extremum global, ni que F n'en admette un.

19 — (**) — **X-ENS PSI 2014**

On considère une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de taille $n \geq 3$ dont les coefficients sont tous strictement positifs et telle que

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$$

On note $d = \min\{m_{i,j}, 1 \leq i,j \leq n\}$. Si Z est une matrice colonne de $\mathbb{R}^n$, on note $\min(Z)$ (resp. $\max(Z)$) le minimum (resp. maximum) de ses coordonnées.

(a). Montrer que $d \leq 1/n$.

(b). Justifier que si Y est une colonne dont les coordonnées sont positives, alors $\min(MY) \geq d\,\max(Y)$.

(c). Montrer que pour toute colonne Y, on a

$$\min(MY) \geq d\,\max(Y) + (1-d)\,\min(Y)$$

On pourra se ramener à la question précédente à l'aide du vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1.

(d). En déduire que pour toute colonne Y, on a

$$\max(MY) - \min(MY) \leq (1-2d)\,(\max(Y) - \min(Y))$$

(e). On fixe une colonne Z et on considère la suite définie par

$$U_0 = Z \qquad \text{et} \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \qquad U_{m+1} = M \cdot U_m$$

Montrer que la suite $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge.

(f). En déduire que la suite $(M^m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de rang 1.

(a). Par hypothèse, $$\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![1;n]\!], \quad m_{1,j} \geq d$$

Ainsi, $nd \leq 1$ soit $$\boxed{d \leq 1/n}$$

(b). Fixons $i \in [\![1;n]\!]$. Alors, puisque tous les coefficients de M et Y sont positifs,

$$(MY)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\,Y_i \geq \sum_{j=1}^{n} d\,Y_i \geq d\max(Y)$$

L'inégalité étant valable pour tout i, elle est valable en particulier pour l'indice i en lequel $\min(MY)$ est atteint et donc

$$\boxed{\min(MY) \geq d\max(Y)}$$

(c). Notons J le vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1, et $Z = Y - \min(Y) \cdot J$. Par construction, Z est à coefficients positifs ou nuls, et d'après la question précédente,

$$\min(MZ) =\geq d\max(Z) \qquad \text{soit} \qquad \min(MY - \min(Y)\cdot MJ) \geq d\max(Y - \min(Y)\cdot J)$$

Par hypothèse sur M,

$$\forall i \in [\![1;n]\!]\,, \qquad (MJ)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\cdot 1 = 1 \qquad \text{d'où} \qquad MJ = J$$

On peut alors remarquer que pour tout vecteur colonne A et tout scalaire k,

$$\min(A - k\cdot J) = \min(A) - k \qquad \text{et} \qquad \max(A - k\cdot J) = \max(A) - k$$

Il s'ensuit que $$\min(MY) - \min(Y) \geq d\big(\max(Y) - \min(Y)\big)$$

soit bien $$\boxed{\min(MY) \geq d\max(Y) + (1-d)\min(Y)}$$

(d). On peut remarquer que pour tout vecteur colonne A,

$$\min(-A) = -\max(A) \qquad \text{et} \qquad \max(-A) = -\min(A)$$

Appliquons le résultat du (c) au vecteur colonne $-Y$. D'après la remarque précédente, il vient

$$-\max(MY) \geq -d\min(Y) - (1-d)\max(Y) \qquad \text{soit} \qquad \max(MY) \leq d\min(Y) + (1-d)\max(Y)$$

Mais toujours d'après le (c), on a également

$$-\min(MY) \leq -d\max(Y) - (1-d)\min(Y)$$

Il ne reste plus qu'à additionner ces deux inégalités.

$$\boxed{\max(MY) - \min(MY) \leq (1-2d)\,(\max(Y) - \min(Y))}$$

(e). Pour tout entier m, on note $$\alpha_m = \max(U_m) \qquad \text{et} \qquad \beta_m = \min(U_m)$$

Par définition, on a clairement $\alpha_m \geq \beta_m$. De plus, la question (d) prouve que

$$\alpha_{m+1} - \beta_{m+1} \leq (1-2d)(\alpha_m - \beta_m)$$

donc par recurrence immédiate,

$$0 \leq \alpha_m - \beta_m \leq (1-2d)^m(\alpha_0 - \beta_0) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \qquad (\text{car} \quad (1-2d) \in \,]0;1[)$$

Il ne reste plus qu'à justifier la monotonie des suites pour reconnaître des suites adjacentes. Or, pour tout vecteur colonne A et tout indice i,

$$(MA)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}A_j \leq \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\max(A) = \max(A)$$

ceci étant vrai pour tout entier i, on a notamment

$$\max(MA) \leq \max(A) \qquad \text{et notamment} \qquad \max(U_{m+1}) \leq \max(U_m)$$

La suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, et on justifie de manière similaire la croissance de $(\beta_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Les suites sont donc adjacentes, et en particulier, elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Sachant que par définition,

$$\forall i \in [\![1;n]\!]\,, \qquad \beta_m \leq (U_m)_i \leq \alpha_m$$

on en déduit par encadrement que toutes les coordonnées de U_m convergent vers la même limite ℓ. En d'autres termes,

$$\boxed{\text{La suite } (U_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un élément de } \mathrm{Vect}\,\{{}^t(1,1,\ldots,1)\}.}$$

(f). Fixons $j \in [\![1;n]\!]$ et notons E_j le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La j-ième colonne de M^m est donnée par $M^m \cdot E_j$. Le résultat de la question précédente prouve que ce vecteur converge vers un élement de $\mathrm{Vect}\,\{{}^t(1,1,\ldots,1)\}$. Ceci étant vrai pour tout entier j, on en déduit que $(M^m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice dont toutes les colonnes appartiennent à la droite engendrée par ${}^t(1,1,\ldots,1)$. En particulier,

$$\boxed{\text{La suite } (M^m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge vers une matrice de rang 1.}}$$

20 — (**) — **Mines PC 2016**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique. On note

$$G_f = \{T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}$$

(a). On suppose f continue. Montrer que G_f est un fermé.

(b). Donner un exemple de fonction pour laquelle $G_f = \mathbb{Q}$.

(c). Soit f une fonction telle que 1 et $\sqrt{2}$ soient tous deux des éléments de G_f. Montrer que l'équation $f(x) = f(0)$ possède une infinité de solutions dans $]0;\pi/2[$.

(a). Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G_f convergente vers une limite T_∞. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (que l'on fixe), et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n \in G_f \qquad \text{donc} \qquad f(x+T_n) = f(x)$$

La suite $(x+T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x+T_\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, il vient en passant à la limite

$$f(x+T_\infty) = f(x)$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, cela signifie que $T_\infty \in G_f$. La caractérisation séquentielle des fermés assure que

$$\boxed{\text{L'ensemble } G_f \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.}$$

(b). A noter qu'on ne suppose plus f continue ici. L'exemple est classique, il suffit de prendre la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, définie par

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si q est un élément de $\mathbb{Q}$, alors $x+q$ est rationnel si et seulement si x l'est. Par suite, $f(x+q) = f(x)$ et $q \in G_f$. Si r est un irrationnel, alors en particulier $f(0) = 1$ et $f(r) = 0$ donc $f(0) \neq f(0+r)$ et $r \notin G_f$. Cela prouve que $G_f = \mathbb{Q}$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est la fonction caractéristique de } Q, \text{ alors } G_f = \mathbb{Q}.}$$

(c). Il est clair que G_f est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il contient 0, est stable par addition et passage à l'opposé. Notons

$$A = \left\{p + q\sqrt{2},\ p, q \in \mathbb{Z}\right\}$$

Puisque 1 et $\sqrt{2}$ sont des périodes de G_f, il en est de même de tout élément de A. Par suite, $f(0) = f(a)$ pour tout $a \in A$. Il suffit donc de montrer que l'intervalle $]0;\pi/2[$ contient une infinité d'éléments de A. On se sert pour cela de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. Par définition, il est clair que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A \cap [0;1[$ donc en particulier dans $[0;\pi/2[$. De plus, ses éléments sont deux à deux distincts, puisque s'il existe p et q distincts tels que $a_p = a_q$, alors

$$p\sqrt{2} - \lfloor p\sqrt{2} \rfloor = q\sqrt{2} - \lfloor q\sqrt{2} \rfloor \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt{2} = \frac{\lfloor q\sqrt{2} \rfloor - \lfloor p\sqrt{2} \rfloor}{p-q}$$

ce qui contredit l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. L'ensemble $\{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est donc infini est à valeurs dans $A\cap]0;1[$. En particulier, puisque $f(a_n) = f(0)$ pour tout entier n,

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = f(0) \text{ admet une infinité de solutions dans }]0;\pi/2[.}$$

Remarque : On peut en réalité montrer que l'ensemble A est dense dans $\mathbb{R}$. Cela implique notamment que n'importe quel intervalle $]a;b[$ de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'éléments de A et donc une infinité de solutions de l'équation $f(x) = f(0)$ d'inconnue x. Si l'on ajoute à cela l'hypothèse que f est continue, on en déduit aussitôt que f est nécessairement constante.

21 — (***) — **X PC 2016**

Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}_+$ non borné tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $U \cap (x\mathbb{N})$ est fini.

(ii) Il existe $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais telle que f n'ait pas de limite en $+\infty$.

On raisonne par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Puisque f n'a pas de limite en $+\infty$, en particulier elle ne tend pas vers 0 en $+\infty$ (ce qui serait de toute façon la seule limite possible compte tenu de l'autre hypothèse). Par définition,

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}, \quad \exists x \geq X, \qquad |f(x)| > \epsilon \tag{$\star$}$$

Posons dans ce cas $$U = f^{-1}(]-\infty; -\epsilon[\cup]\epsilon; +\infty[)$$

L'ensemble U est ouvert comme image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue. Justifions que U vérifie les propriétés souhaitées.

- La propriété $(\star)$ se réécrit alors $$\forall X \in \mathbb{R}, \quad \exists x \geq X, \qquad x \in U$$
  ce qui prouve que U n'est pas bornée.
- Fixons $x > 0$. D'après **(ii)**, puisque $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0,
  $$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \qquad |f(nx)| \leq \epsilon \qquad \text{soit} \qquad nx \notin U$$
  En particulier, $U \cap x\mathbb{N}$ est fini puisqu'inclus dans $\{0, x, 2x, \ldots, (N-1)x\}$.

On a donc bien démontré que **(ii)** implique **(i)**.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons **(i)** vérifiée. Commençons par considérer $g : x \longmapsto d(x, \overline{U})$ qui à x associe sa distance au complémentaire de U. Pour tout $x > 0$, sachant que $U \cap xN$ est un ensemble fini, on peut introduire

$$N = \max\{k \in \mathbb{N}, \ k\,x \in U\}$$

et en particulier $$\forall p > N, \qquad p\,x \notin U \qquad \text{d'où} \qquad p\,x \in \overline{U} \quad \text{et} \quad g(p\,x) = d(p, x, \overline{U}) = 0$$

La suite $(g(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc nulle à partir d'un certain rang, donc est notamment convergente de limite nulle.

Cette fonction n'a cependant aucune raison de ne pas avoir de limite en $+\infty$, on va donc légèrement la modifier pour cela. Par hypothèse, U est non borné donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de U, que l'on peut supposer strictement croissante, de limite $+\infty$. On construit alors une fonction h, affine par morceaux telle que

$$h(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad h(x_n) = \frac{1}{g(x_n)}$$

Il suffit alors de poser $f = g \cdot h$. Par construction, pour tout $x > 0$, on a toujours $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang donc convergente. Mais cette fois, on a de plus $f(x_n) = 1$ pour tout entier n avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui montre que f n'admet pas 0 pour limite en $+\infty$, donc pas de limite du tout en $+\infty$. On a donc bien justifié la propriété **(ii)**.

On peut donc conclure $\boxed{\text{Les propositions } \textbf{(i)} \text{ et } \textbf{(ii)} \text{ sont équivalentes.}}$

Remarque : Cet énoncé est franchement inhabituel puisqu'il demande d'établir l'équivalence entre deux énoncés, mais chercher à vérifier si ces deux là sont simultanément vrais ou simultanément faux ! En l'occurence, ils sont faux tous les deux. L'absurdité de la proposition **(ii)** est un résultat qui porte le nom de *lemme de Croft*. La preuve passe par la notion d'espace complet et le résultat suivant :

Théorème de Baire : Si (E, d) est un espace métrique complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E (resp. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide), alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ reste une partie dense de E (resp. $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ reste d'intérieur vide).

Ce théorème n'a jamais été au programme des classes préparatoires, mais il restait largement accessibles à de bons élèves à l'époque où la notion d'espace complet faisait encore partie du programme de MP. Les plus curieux peuvent venir en discuter avec moi à tout moment.